PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REVISTA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS)

ISSN 2359-2842 Volume 13, número 31 – 2020 DOI: 10.46312/pem.v13i31.6737

A acolhida do Teorema da Incompletude de Gödel pelos matemáticos

The acceptance of Gödel's Incompleteness Theorem by mathematicians

Rosemeire de Fatima Batistela[1]

Henrique Lazari[2]

Maria Aparecida Viggiani Bicudo[3]

RESUMO

Neste artigo apresentamos o modo como alguns dos matemáticos mais importantes do início do século XX, aqueles responsáveis pela organização da Matemática em estruturas algébricas, topológicas e de ordem, que estudamos em cursos de graduação em Matemática, acolheram os resultados estabelecidos pelo Teorema da Incompletude de Gödel. Compreendemos que a postura assumida pelo grupo Bourbaki e revelada em suas obras diz desse modo de como os matemáticos da época receberam o teorema da incompletude e conviveram com as consequências dele. A atitude assumida pelo grupo foi seguir fazendo Matemática com o mesmo ideal de formalização completa, embora diante da prova da existência de um conjunto não vazio de proposições verdadeiras e indemonstráveis - via ferramentas matemáticas de produção dessa ciência - e, da incompletude de toda teoria que contenha os axiomas de Peano. Apresentamos também a perspectiva de Wittgenstein em relação ao teorema da incompletude de Gödel. Por fim, entendemos que esse teorema é compreendido pela comunidade matemática como mensageiro da incompletude como uma

[1] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro/SP. Professora Adjunta do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Feira de Santana, BA, Brasil. Av. Transnordestina, s/n – Novo Horizonte - CEP: 44036-900, Feira de Santana, BA, Brasil. E-mail: rosebatistela@gmail.com. Orcid https://orcid.org/0000-0003-2779-7251

[2] Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas/SP. Professor Assistente doutor ms-3 do Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Avenida 24 A, n. 1515, Bela Vista, CEP: 13506-900, Rio Claro, SP, Brasil. E-mail: hlazzari@uol.com.br. Orcid https://orcid.org/0000-0002-9785-8083

[3] Livre-docente pela Faculdade de Ciências Sociais, Letras e Educação da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professora Titular do Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, SP, Brasil. Avenida 24 A, n. 1515, Bela Vista, CEP: 13506-900, Rio Claro, SP, Brasil. E-mail: mariabicudo@gmail.com. Orcid http://orcid.org/0000-0002-3533-169X

característica inerente à axiomatização, não como um impedimento para o prosseguimento da atividade com sistemas formais e sim como um resultado revigorante para a Matemática.
.

PALAVRAS-CHAVE: Teorema da Incompletude de Gödel (TIG). Bourbaki. Wittgenstein. Matemática. Método Axiomático. Metamatemática.

ABSTRACT

In this paper we present how some of the most important mathematicians of the early twentieth century, those responsible for organizing mathematics into algebraic, topological and order structures, which we studied in undergraduate courses in mathematics, welcomed the results established by the Incompleteness Theorem of Gödel. We understand that the stance taken by the Bourbaki group and revealed in their works thus speaks of how the mathematicians of the time received the incompleteness theorem and its consequences. The attitude assumed by the group was to continue doing Mathematics with the same ideal of complete formalization, although faced with the proof of the existence of a non-empty set of true and indemonstrable propositions - via mathematical tools for producing this science - and of the incompleteness of any theory that contain Peano's axioms. We also present Wittgenstein's perspective on Gödel's incompleteness theorem. Finally, we understand that this theorem is understood by the mathematical community as a messenger of incompleteness as a characteristic inherent to axiomization, not as an impediment to the continuation of the activity with formal systems, but as an invigorating result for Mathematics.
KEYWORDS: Gödel's incompleteness Theorem (GIT); Bourbaki; Wittgenstein; Mathematics; Axiomatic Method. Metamathematics.

Apresentação

Como o teorema da incompletude de Gödel (TIG) [4] foi acolhido pela comunidade matemática? Essa é a questão que buscaremos responder neste artigo. A possibilidade estabelecida pelo TIG para a Matemática certamente foi assunto tematizado pelos matemáticos do início do século XX, em especial pelo grupo Bourbaki[5] o qual se colocava a tarefa de organizar toda a Matemática existente, estruturando-a.

---

[4] "O TIG, ou Teoremas da Incompletude de Gödel, como ficaram conhecidos os teoremas VI e XI expostos na teoria da incompletude apresentada no artigo de Gödel, demonstra (primeiro teorema) "que a aritmética formal, e por extensão a maior parte das teorias matemáticas interessantes, era incompleta (e, pior, incompletável)." (DA SILVA, 2007, p. 204) [...]; e (segundo teorema, um corolário do primeiro) "que a demonstração da consistência da aritmética formal era impossível por métodos que pudessem ser formalizados na própria aritmética formal." (DA SILVA, 2007, p. 204 -205). No artigo original de Gödel, encontramos a demonstração do primeiro teorema e um argumento da demonstração para o segundo." Batistela (2017, p. 35).

[5] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo coletivo de um grupo de matemáticos franceses que objetivavam fundamentar toda a Matemática na teoria dos conjuntos. Os membros fundadores foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil. O grupo trabalhou por mais rigor e simplicidade, criando uma nova terminologia e conceitos, ao longo dos tempos. Escreveu uma série de livros que começou a ser editada em 1935 e expunha a Matemática Moderna Avançada para que pudessem servir de referência a estudantes e pesquisadores. Embora o Grupo Bourbaki seja oficialmente conhecido como a Associação dos colaboradores de Nicolas Bourbaki, aqui neste texto trataremos de Bourbaki como uma pessoa. Para saber mais sobre Bourbaki, pode-se, entre outros títulos e obras, ler *Scientific American Brasil* – Coleção Gênios da Ciência, 2012, p. 68-98.

No âmbito da Educação Matemática, essa questão também pode ser colocada, qual seja, se há, qual seria a relação entre o conhecimento do TIG e a Educação Matemática? A esse respeito, em Batistela (2014), Batistela e Bicudo (2018) explicitamos nossa visão de como o conhecimento do teorema da incompletude pode jogar luz sobre a concepção de Matemática e consequentemente influenciar o ensino de matemática.

O motivo que nos leva a divulgar esse assunto, o acolhimento e as reações frente ao TIG na e pela comunidade de matemática, perpassa nossa compreensão de que conhecer a história das ideias matemáticas, em especial conhecer este teorema é importante, tanto para licenciandos quanto bacharelandos em matemática, dado que ambos frequentemente retornam às Universidades atuando como professores em cursos de graduação. Somos cientes de que é possível compreender um teorema em diversos níveis. Para o efeito desejado, ressaltamos que o conhecimento do TIG deva ser em um nível que conduza à compreensão do poder do método axiomático e da estrutura da mensagem que ele evidencia, que diz da incompletude das teorias que contenham os axiomas da aritmética de Giuseppe Peano (1858-1932)[6] em seus sistemas formais.

A compreensão do fenômeno gödeliano da incompletude certamente pode provocar dúvidas nos estudantes com entendimento enraizado de que a Matemática é soberana sobre todas as disciplinas, pode romper com a ideia de terminalidade da Matemática que era presente nos discursos de matemáticos do início do século XX e ainda o é, haja vista o embate da História da Matemática para apresentar a perspectiva de que problemas e novos problemas mantém o vigor da pesquisa em Matemática.

Embora O TIG tenha sido produzido e endereçado pela/à própria ciência Matemática, enquanto educadores matemáticos ele nos diz muito pois ele produziu o entendimento dos matemáticos sobre o alcance dos métodos de produção dessa ciência e consequentemente o que consideram como Matemática. A concepção de Matemática que reside no âmbito do campo científico da Educação Matemática é compartilhada na fonte.

O estabelecimento do TIG e a divulgação do resultado foi concomitante ao trabalho dos matemáticos na busca de uma fundamentação para a Matemática. Um

---

[6] Segue uma descrição dos axiomas de Peano: i) *Zero* é um número; ii) Se *a* é um número, *o sucessor de a* é um número; iii) *Zero* não é o sucessor de nenhum número. iv) Dois números que possuem sucessores iguais são eles próprios iguais; e v) Se um conjunto S de números contém o *zero* e também *o sucessor de todo número de S*, então todo número está em S.

dos expoentes desse empenho foi David Hilbert (1862-1943) que desenvolveu um programa que objetivava axiomatizar toda a Matemática por meio da Lógica, extirpando a semântica do discurso matemático, fazendo-a, a axiomatização, com pura manipulação de símbolos, por meio de raciocínios finitários e com um sistema simbólico formal. Ele julgava que, dessa forma, mostraria que a Matemática estaria livre de contradições.

O TIG foi divulgado no artigo “Sobre as proposições indecidíveis dos Principia Mathematica e sistemas correlatos”, Gödel (1977), em 1931. Ele evidencia que o método da axiomatização, até então tido como ilimitado e imune à contradições internas, se mostrava, em palavras de Nagel e Newmann (1973, p.19), “em parte corrompido por um efeito de ineficiência própria”.

Ao demonstrá-lo, a partir da aritmética básica dos números naturais, Gödel provou a impossibilidade de demonstrar certas proposições importantes na aritmética, e, em consequência disso, confirmou que os sistemas lógicos que contenham a aritmética de Peano nunca estabelecerão internamente a sua consistência.

A estrutura idealizada e em estado de edificação pela escola de Hilbert, - o Formalismo, que sustentava a esperança de que muitos ramos da Matemática pudessem ser livres de contradições internas - fora abalada pela repercussão do teorema da incompletude. Desse modo, as pesquisas sobre os fundamentos da Matemática, que se alimentavam dessa esperança, logo perderam as forças e o empenho dos matemáticos divergiu. O TIG evidenciou que existem, e sempre existirão, verdades matemáticas impossíveis de serem demonstradas formalmente. Assim, um sistema lógico como a Matemática não pode bastar-se a si mesmo, em si mesmo não pode fundamentar-se.

A demonstração do TIG comprova a presença de proposições indecidíveis na aritmética dos números naturais (primeiro teorema da incompletude) e, consequentemente, a impossibilidade de essa teoria demonstrar sua própria consistência (segundo teorema da incompletude). O ponto de impacto do teorema da incompletude de Gödel na Matemática foi o problema 2 de Hilbert[7], que solicitava a prova da consistência da aritmética. O programa de Hilbert, aquele que buscava fundamentar a Matemática na aritmética básica dos números naturais, dependia da demonstração do problema 2 para obter o completamento do programa. O TIG

[7] O problema 2 é assim enunciado: Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética.

anuncia a impossibilidade de a prova da consistência da aritmética ser realizada na própria aritmética. Isso provocou um revés na Matemática, pois a essa altura, o Formalismo era a terceira das escolas filosóficas da Matemática que seguia buscando fundamentar a Matemática, uma vez que as escolas do Logicismo e do Intuicionismo já tinham compreendido as impossibilidades de seus projetos de fundamentação da Matemática, cada qual com seu motivo. A escola logicista trabalhava para traduzir toda a Matemática já feita para expressões lógicas, e a escola intuicionista tentava reescrever toda a Matemática existente eliminando as provas não construtivas, ou seja, as provas que demonstravam a existência de objetos matemáticos por redução ao absurdo, da Matemática e da Lógica.

A interpretação do próprio Gödel para o impacto de seu teorema da incompletude foi divulgada em 1933, dois anos após a divulgação do TIG, Gödel (1933), em um artigo em que Gödel aponta a existência de caminhos para o programa de Hilbert ser reeditado, no entanto, é fato que o teorema da incompletude impactou o programa de Hilbert. Na apreciação de Da Silva (2003):

> Seja como for, o programa de Hilbert certamente foi substancialmente enfraquecido pelos notáveis resultados de Gödel. Entretanto, não morreu, e o próprio Gödel contribuiu para uma versão modificada dele, a saber, estabelecer por meios construtivos apropriados (finitários, predicativos, intuicionistas, etc.) a consistência relativa de teorias formais nas quais partes da matemática clássica possam ser desenvolvidas. (DA SILVA, 2003, p. 35).

No que se refere ao significado do termo *incompletude*, Nagel e Newman (1973) explicam:

> Os axiomas de um sistema dedutivo são "completos" se cada enunciado, que pode ser expresso no sistema, é formalmente deduzível dos axiomas. Por outro lado, se nem todo enunciado verdadeiro expressável no sistema for dedutível, os axiomas são incompletos". (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 83).

Na demonstração realizada por Gödel, ***G***[8], a proposição indecidível, é uma fórmula verdadeira da aritmética, obtida por um argumento metamatemático e, portanto, não formalmente dedutível nessa teoria. Assim sendo, na hipótese de que o conjunto de axiomas da aritmética seja consistente, segue-se que ele, o conjunto, é incompleto.

---

[8] Vale a pena lembrar que Gödel construiu a fórmula G que diz de si mesma que não é demonstrável. Ela é a imagem especular *dentro* do cálculo aritmético do enunciado metamatemático: "A fórmula com o número de Gödel *sub (n, 13, n)* é não demonstrável." (NAGEL, NEWMAN, 1973, p. 80).

Uma vez que o conjunto seja incompleto pode-se pensar em adicionar o indecidível, uma verdade sem prova, à base da teoria junto aos demais axiomas como um axioma subsequente. Porém, o novo conjunto acrescido desse axioma ulterior ainda seria insuficiente para produzir formalmente todas as verdades aritméticas, pois outra fórmula aritmética verdadeira, porém, indecidível, poderia ser construída no novo sistema ampliado, da mesma maneira que ***G*** foi construída.

O indecidível obriga o reconhecimento de uma limitação fundamental no poder do método axiomático, pois, ele anuncia que há verdades matemáticas que estão para além das verdades derivadas pelo modo de produção da Matemática.

As estruturas da Matemática e o grupo Bourbaki

As estruturas de Bourbaki são apresentadas em Bourbaki (1950)[9], são estruturas que o grupo propõe para a Matemática[10]. Apreendemos que esta obra define a tarefa do matemático e legitima essa profissão, pois categoriza os objetos com os quais, a partir de então, o matemático deveria/viria a trabalhar.

O texto de Bourbaki de 1950 é apresentado na comunidade matemática depois do fervilhar das ideias e concepções do que deveria fundamentar a Matemática, ou seja das escolas filosóficas do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo que buscavam essa fundamentação e depois do TIG que atinge exatamente o pilar principal no qual se apoiava a ideia da escola formalista. Bourbaki (1950) argumenta que a Matemática trata de uma vasta extensão de temas e que desde o século XIX tem aumentado o número de publicações sobre esses assuntos. Além disso, observa que o trabalho dos matemáticos é realizado em domínios estanques no âmbito da própria Matemática. Desse modo, apresentar uma visão dela como um todo, como campo científico que abarque todos os tópicos é uma tarefa quase incontornável. Ciente disso, lança-se ao desafio que vai articulando seus pontos de vista até a apresentação geral.

Sobre a distribuição dos matemáticos na Matemática, Bourbaki (1950) pontua:

> Muitos matemáticos assumem porções num canto do domínio da matemática, do qual não pretendem sair; não somente eles ignoram quase que completamente o que não diz respeito ao seu campo específico como, também, eles são incapazes de entender a

---

[9] Este manifesto foi escrito em 1948 por J. Dieudonné, em nome do grupo, e defende a edificação da Matemática sobre estruturas de tipos diferentes. Roque afirma que “A metáfora de que se estava propondo uma “arquitetura” esclarece muito sobre o desejo do autor de construir uma teoria unificada que, como um edifício, se assentasse solidamente sobre suas fundações”. (ROQUE, 2012, p. 475).

[10] “Nessa obra não há, novamente, nenhuma menção de Gödel, mas nesta ocasião há uma sugestão de dificuldades a que a matemática terá que transpor”. (MATHIAS, 1992, p. 5).

> linguagem e a terminologia usada por seus colegas que estão trabalhando em um canto de outro campo muito distante do seu. (BOURBAKI, 1950, p. 221, tradução nossa).[11]

Frente ao isolamento dos matemáticos produzindo Matemática, cada qual em seu domínio, o grupo sugere a questão se há uma Matemática ou várias Matemáticas, já que, embora o trânsito dos matemáticos entre os diferentes domínios seja permitido, isso raramente acontece. Da mesma forma, questiona se a exuberante proliferação da produção matemática faz dessa ciência um organismo mais forte, coeso e em unidade com seus novos crescimentos, ou, se evidencia uma tendência de fragmentação progressiva em que disciplinas são separadas umas das outras em objetivos, métodos e línguas diferentes.

Seguindo a argumentação, os bourbakistas observam que o aspecto comum a toda produção matemática se revela nos procedimentos utilizados, que são, os sistemas formais e o método axiomático, sendo este último o que tem trazido a unidade mais estreita entre suas diferentes partes.

O grupo entende que após a falência dos projetos do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, que buscavam por diferentes sistemas que caracterizassem a Matemática como uma ciência marcada por um método definitivo específico, mostrou-se uma tendência para olhá-la como "um conjunto de disciplinas com base em conceitos particulares, exatamente especificados [...] interligados por mil estradas de comunicação, permitindo que os métodos de qualquer uma dessas disciplinas pudesse fertilizar os outros." (BOURBAKI, 1950, p. 223).

Com essa argumentação como base, afirma que compreende que toda teoria Matemática é uma concatenação de proposições, cada uma derivando dos precedentes, em conformidade com as regras do um sistema lógico, convenientemente adaptados aos objetivos particulares do matemático. Explica que o raciocínio dedutivo não é um princípio unificador para a Matemática, muito embora, superficialmente, seja assim compreendido. Argumenta que o fato dos diversos ramos usarem o mesmo método, por meio de cadeias de silogismos, não pode ser o eixo unificador para esta ciência, pois este é a forma externa que o matemático dá ao seu pensamento, o veículo que o torna acessível para os outros. Porém, que o método axiomático fornece a inteligibilidade da Matemática, que

[11] Do original: “Many mathematicians take up quarters in a corner of the domain of mathematics, which they do not intend to leave; not only do they ignore almost completely what does not concern their special field, but they are unable to understand the language and the terminology used by colleagues who are working in a corner remote from their own” (BOURBAKI, 1950, p. 221).

começa a partir da crença *a priori* na convicção de que este método, nas demonstrações

> Vai separar a parte mais importante de seus argumentos; depois, tomando cada um deles separadamente e formulando-os numa forma abstrata, ele irá desenvolver as consequências as quais se seguem dele sozinho. Retornando depois disso à teoria em consideração, ele recombinará os elementos componentes, os quais tinham previamente sido separados, e irá inquirir como aqueles diferentes componentes influenciam um ao outro. Não existe na verdade nada de novo neste clássico indo e vindo entre análise e síntese; a originalidade do método situa-se inteiramente no caminho no qual ele é aplicado. (BOURBAKI, 1950, p. 223-224, tradução nossa).[12]

Frente ao argumentado, Bourbaki (1950) apresenta então as estruturas matemáticas, quais sejam, algébricas, de ordem e topológica, como proposta para padronizar a Matemática por meio da linguagem da teoria dos conjuntos.

Lembrando que a principal característica do método axiomático é uma economia considerável de pensamento e considerando que as estruturas propostas por Bourbaki são estabelecidas com objetivo de oferecerem ferramentas para o matemático, pois elas permitem que o matemático lance mão de teoremas gerais que pertencem a uma estrutura, ao reconhecer entre os elementos que está estudando relações que satisfaçam os axiomas de outra estrutura.

Isso revela a forma pela qual a Matemática vem sendo produzida sobretudo depois da falência dos projetos que objetivavam sua fundamentação e após o TIG. Notemos que, para este autor, o trabalho do matemático, antes desse modo padronizado que ele próprio propõe, "obrigava os matemáticos a forjarem para si mesmos os meios de ataque ao seu problema; sua força dependia de seus talentos pessoais e eles foram carregados com hipóteses restritivas, resultantes das peculiaridades do problema que estava sendo estudado" (BOURBAKI, 1950, p. 227). Porém, Bourbaki reflete:

> O matemático não trabalha como uma máquina, nem como o operário na esteira de produção; não podemos exagerar o papel fundamental desempenhado em sua pesquisa por uma intuição

[12] Do original: "**The notion of structure.** In what form can this be done? It is here that the axiomatic method comes closest to the experimental method. Like the latter drawing its strength from the source of Cartesianism, it will "divide the difficulties in order to overcome them better". It will try, in the demonstrations of a theory, to separate out the principal mainsprings of its arguments; then, taking each of these separately and formulating it in abstract form, it will develop the consequences which follow from it alone. Returning after that to the theory under consideration, it will recombine the component elements, which had previously been separated out, and it will inquire how these different components influence one another. There is indeed nothing new in this classical going to-and-fro between analysis and synthesis; the originality of the method lies entirely in the way in which it is applied." (BOURBAKI, 1950, p. 223-224).

> especial, que não é o sentido popular de intuição, mas sim um tipo de adivinhação direta (a frente de todo raciocínio) do comportamento normal, que ele parece ter o direito de esperar dos seres matemáticos, com quem uma longa convivência o tornou tão familiar quanto com os seres do mundo real. (BOURBAKI, 1950, p. 227, tradução nossa).[13]

Nessa passagem estaria o argumento principal da proposta do grupo, que em nosso entendimento, seria facilitar o trabalho dos matemáticos no sentido de mostrar-lhes que há estruturas que aproximam suas produções, que até então vinham sendo realizadas isoladamente.

Explicando mais detalhadamente do que trata uma estrutura, Bourbaki (1950) afirma que essa ideia pode ser aplicada a conjuntos de elementos cuja natureza não é especificada, pois na definição de uma estrutura, toma-se como dado uma ou várias relações entre esses elementos. Em seguida, postula-se uma determinada relação ou relações para satisfazer os axiomas da estrutura em causa. Para configurar o sistema axiomático de uma determinada estrutura, elevam-se os axiomas da estrutura às consequências da dedução lógica, desconsiderando toda e qualquer hipótese sobre os elementos do conjunto em causa, bem como à sua própria natureza. Logo, ele expõe que "cada estrutura traz consigo sua própria linguagem carregada de referências intuitivas especiais derivadas das teorias de que a análise axiomática descrita acima tem derivadas da estrutura" (BOURBAKI, 1950, p. 227, tradução nossa).[14] Disso, ele justifica que na proposta das estruturas, os matemáticos acabam tendo à disposição poderosas ferramentas fornecidas pelos grandes tipos de estruturas;

> Que permite que de um único ponto de vista alcance domínios imensos, agora unificadas pelo método axiomático, domínios esses que estavam anteriormente em um estado completamente caótico. O que tudo isso significa é que a matemática tem menos do que nunca sido reduzida a um jogo puramente mecânico de fórmulas isoladas e mais do que nunca a intuição domina na gênese das descobertas. (BOURBAKI, 1950, p. 228, tradução nossa).[15]

---

[13] Do original: This is however, a very poor analogy; "the mathematician does not work like a machine, nor as the workingman on a moving belt; we can not over-emphasize the fundamental role played in his research by a special intuition, which is not the popular sense-intuition, but rather a kind of direct divination (ahead of all reasoning) of the normal behavior, which he seems to have the right to expect of mathematical beings, with whom a long acquaintance has made him as familiar as with the beings of the real world." (BOURBAKI, 1950, p. 227).

[14] Do original: "Now, each structure carries with it its own language, freighted with special intuitive references derived from the theories from which the axiomatic analysis described above has derived the structure." (BOURBAKI, 1950, p. 227).

[15] Do original: "What all this amounts to is that mathematics has less than ever been reduced to a purely mechanical game of isolated formulas; more than ever does intuition dominate in the genesis of discoveries. But henceforth, it possesses the powerful tools furnished by the theory of the great types

Referindo-se ao trabalho matemático posteriormente ao TIG, Morris Kline (1980), compara o matemático a um limpador de terreno que, ao limpar, se apercebe da presença de animais selvagens escondidos no bosque à sua volta e mesmo limpando uma área maior, ele sabe que apenas afugentou para mais longe estes animais. Animais esses compreendidos aqui por nós como sendo os indecidíveis, os quais têm existência provada por Gödel e podem um dia ser encontrados.

Diante disso, entendemos que a mensagem que sobressai para o trabalho dos matemáticos é que à certeza da presença dos animais selvagens soma-se a incerteza frente às bifurcações que solicitam escolhas, porém, estas ao serem feitas mostram caminhos para a continuação da atividade de produção matemática.

A acolhida do TIG por Bourbaki

O acolhimento do resultado da incompletude na Matemática, em nossa compreensão, revela-se na atitude do grupo Bourbaki de ter se dado conta da possibilidade de encontrar com um indecidível ao passo que afirmam que continuariam com o ideal de uma formalização completa da Matemática. Além disso, na reflexão que desenvolveram e mostraram ser conhecedores das opções frente ao encontro com uma proposição indemonstrável.

A menção ao nome de Gödel nesta obra acima referida aparece na página E.L 12 no terceiro parágrafo, em um comentário sobre a impossibilidade da prova da consistência da aritmética:

> Para escapar desse dilema, a consistência de uma linguagem formalizada teria de ser "provada" por argumentos que poderão ser formalizados em uma linguagem menos rica e, consequentemente, mais digna de confiança; mas um famoso teorema da meta-matemática, devido a Gödel, afirma que isto é impossível para uma linguagem deste tipo que devemos descrever, que é rica o suficiente em axiomas para permitir a formulação dos resultados de aritmética clássica. (BOURBAKI, 1968, p. 12, tradução nossa).[16]

Na continuação da apresentação das ideias que norteariam suas obras, Bourbaki (1968) argumenta, em relação à teoria dos conjuntos, que, das provas relativas de consistência, que ligam logicamente as várias teorias matemáticas à teoria dos conjuntos, segue que qualquer contradição encontrada em alguma teoria

---

of structures; in a single view, it sweeps over immense domains, now unified by the axiomatic method, but which were formerly in a completely chaotic state". (BOURBAKI, 1950, p. 228).

[16] Do original: "To escape this dilemma, the consistency of a formalized language would have to be "proved" by arguments which could be formalized in a language less rich and consequently more worthy of confidence; but a famous theorem of metamathematics, due to Godel, asserts that this is impossible for a language of the type we shall describe, which is rich enough in axioms to allow the formulation of the results of classical arithmetic" (BOURBAKI, 1968, p. 12).

deve dar origem a uma contradição na teoria dos conjuntos. Contudo, por essa razão, não se pode deduzir a consistência da teoria dos conjuntos.

Ainda sobre isso:

> No entanto, durante o meio século desde os axiomas desta teoria foram pela primeira vez precisamente formulados, esses axiomas foram utilizados para inferir conclusões nos mais diversos ramos da matemática sem chegar a uma contradição, de modo que temos motivos para esperança de que a contradição nunca vai surgir. (BOURBAKI, 1968, p. 13, tradução nossa).[17]

Prosseguindo, Bourbaki comenta que se a contradição vir de outra forma é porque ela é inerente aos princípios fundamentais da teoria dos conjuntos, fato esse que exige modificações, semelhantemente ao que aconteceu quando surgiram os paradoxos nessa teoria e esta foi revisada. Por isso, adotou-se então essa linguagem formalizada que é essencialmente equivalente à essa que eles descrevem na obra *Elementos de Mathematica: Teoria dos Conjuntos*, Bourbaki (1968), que Bourbaki utiliza na proposta de estruturação e formalização da Matemática.

Bourbaki (1968), em continuação, apresenta que encararão o futuro dessa ciência com serenidade, pois compreendem que a Matemática, em seus mais de dois mil e quinhentos anos, foi corrigindo seus erros e enriquecendo-se. Baseados nas experiências com as superações da própria Matemática, o grupo Bourbaki crê que ela está destinada a continuar viva, mesmo que uma contradição lhe apareça em algum momento.

Na explicitação do grupo compreendemos que a Matemática vai se desenvolvendo e resolvendo uns problemas e dando-se conta da existência de outros. Assim se tem implicitamente a consideração ao TIG, tomado por eles como um dado expresso que afirma algo a mais do que apenas a experiência observada, mas que será contornada ou superada em algum momento.

Compreendemos que, para Bourbaki, a ameaça trazida pelo TIG estava tão longe da base da teoria que podia ser ignorado. Desse modo, os bourbakistas, conscientes da prova da incompletude, seguiam norteados pelo ideal de um rigor perfeito em sua obra e, da possibilidade de fazer a formalização completa da Matemática.

---

[17] Do original: “Nevertheless, during the half-century since the axioms of this theory were first precisely formulated, these axioms have been applied to draw conclusions in the most diverse branches of mathematics without leading to a contradiction, so that we have grounds for hope that no contradiction will ever arise” (BOURBAKI, 1968, p. 13).

Changeux e Connes (1996) a respeito do significado do TIG e do que se pode fazer quando do encontro com um deles, explicitam:

> O teorema afirma apenas que, com um número finito de axiomas não podemos ter resposta para tudo. Porém, se uma questão não é decidível, sob condição de tê-la demonstrado, poderemos atribuir-lhe uma resposta e continuar a raciocinar. Isto significa que cada nova questão indecidível propicia uma bifurcação, a partir do momento em que escolhemos uma resposta positiva ou negativa. O mundo no qual nos movemos comporta diversas bifurcações possíveis. Esse é todo seu significado. Uma vez atribuída uma resposta à questão, podemos continuar e nos colocar novas questões. Antigas questões que não o eram tornam-se então decidíveis... cada questão indecidível cria uma bifurcação e impõe uma escolha. (CHANGEUX; CONNES, 1996, p. 174).

Cabe dizer que Gödel ao apresentar a fórmula **G**, verdadeira e indemonstrável anunciou a existência de um conjunto não vazio de proposições indecidíveis. Porém, nenhum exemplar foi encontrado em espécie em alguma teoria. A presença de um indecidível, no âmbito de uma teoria, indica a não contradição dessa teoria. Na demonstração do TIG, decorre que a não contradição da aritmética de Peano implica a indecidibilidade de uma proposição ***G*** e, inversamente, a indecidibilidade da proposição ***~G*** garante a não contradição da aritmética de Peano, dado que, de uma teoria contraditória é possível deduzir toda proposição exprimível na linguagem dessa teoria. Na prova de Gödel, ***G*** indecidível significa “que em aritmética e, mais geralmente, em toda teoria axiomatizada não contraditória e suficientemente rica para conter a aritmética básica dos naturais, a não contradição da própria teoria não é demonstrável na linguagem da teoria” (GUERRERIO, 2012, p. 50).

Ainda sobre o modo como este resultado foi abraçado na Matemática, faz-se necessário explicitar que há controvérsias sobre Bourbaki ter compreendido e acolhido o resultado do TIG com atenção e entendimento à altura da importância desse teorema. Mathias (1992), em relação ao acolhimento e referência de Bourbaki ao TIG, adjetiva a postura do grupo como aquela que ignorou este resultado. Este autor apresenta um estudo das principais obras de Bourbaki das décadas de 1930 e 1940 e, passando por textos de Henri Cartan, Jean Dieudonné e André Weil, interpreta que Bourbaki demonstra ausência de entendimento dos distintos significados dos termos *verdadeiro* e *demonstrável* tratados por Gödel. Para Mathias, isso revela uma consciência cética dos resultados de Gödel, presumindo que o leitor conheça o resultado. Mathias entende que ao evitar tocar no nome ou considerar o TIG, Bourbaki não deu a atenção devida ao resultado tendo-se em conta o vigor de sua mensagem.

Em relação ao efeito que o teorema de Gödel teve sobre Bourbaki, para Mathias (1992):

> Quase se pode dizer que eles o ignoraram, exceto que o tom de algumas das suas obras sugere um conflito entre uma consciência inquieta que algo aconteceu e um desejo de fingir que não aconteceu. É como se tivessem descoberto que estavam em uma ilha com um dragão e em resposta escolheram acreditar que, se ao dragão não foi dado nenhum nome, então ele não existe. (MATHIAS, 1992, p. 6, tradução nossa).[18]

Mathias (1992) entende que a atitude de Bourbaki não considera a importante contribuição de Gödel para questões fundamentais e questiona o motivo. Na tessitura de sua exposição, ele comenta e apresenta curiosidades, mas pondera, ao fim, que não tem nenhuma explicação sociológica ou psicológica sobre a resistência de Bourbaki ao resultado da incompletude estabelecido por Gödel, no entanto, lança uma hipótese: "pode ser que os bourbakistas tenham sido seduzidos por Hilbert e pelo compromisso com seu programa, e isso, em princípio, poderia causar muita dificuldade para aceitarem o trabalho de Gödel" (MATHIAS, 1992, p. 6). Mathias ainda observa que Hilbert se recuperara do choque mais rapidamente do que seus possíveis discípulos franceses muito mais jovens. E, finaliza afirmando que mais explicações sobre o comportamento de Bourbaki em consideração ao TIG fazem-se necessárias, pois o que fica evidente, para ele, é que os bourbakistas não estavam prontos para enfrentar a consequência do TIG, qual seja, a possibilidade de não existir fundamentos completos para a Matemática, ou seja, de não existir forma de circunscrever a Matemática.

Mesmo assim Mathias (1992) mostra sua consideração ao trabalho de Bourbaki e sua compreensão de que eles ignoraram uma das ideias mais revigorantes da Matemática. Entre elas está o TIG:

> [...] Não discuto o valor positivo de seus livros, nem a magnitude de sua realização; mas eu sugiro que a sua atitude em relação à lógica e à teoria dos conjuntos, que foi transmitida às gerações mais jovens de matemáticos, é prejudicial porque exclui a consciência da percepção da natureza da matemática que são revigorantes; e eu quase me atrevo a sugerir que, se, como alguns dizem, Bourbaki

[18] Do original: "One might almost say that they ignored him, except that the tone of certain of their works suggests a conflict between an uneasy awareness that something has happened and a desire to pretend that it has not. It is as though they had discovered that they were on an island with a dragon and in response chose to believe that if the dragon were given no name it would not exist" (MATHIAS, 1992, p. 6).

> agora está morto, ele foi morto pela esterilidade de suas próprias atitudes. (MATHIAS, 1992, p. 8, tradução nossa).[19]

A isto que viemos tecendo acima sobre a consideração de Bourbaki ao TIG, Mashaal (2012) afirma que Bourbaki fingiu-se de avestruz, referindo-se a atitude do grupo sobre a axiomatização da teoria dos conjuntos, às pesquisas sobre os fundamentos da Matemática e à demonstração dada por Gödel de que qualquer que seja o sistema de axiomas escolhido, é impossível demonstrar a não contradição da Matemática, que resulta desses axiomas pela utilização dos próprios axiomas. Assim afirma Mashaal (2012):

> Diante dessa “crise dos fundamentos” que abateu a matemática na primeira metade do século 20, Bourbaki preferiu fingir-se de avestruz e considerar desinteressantes, para o matemático ativo, os problemas metamatemáticos que atormentavam os lógicos. É difícil compreender, porém, que a coerência lógica de uma teoria axiomática possa ser uma questão desprovida de interesse para um matemático que, como Bourbaki, parece atribuir tanta importância à abordagem axiomática. Essa atitude um tanto esquizofrênica de Bourbaki - compartilhada, digamos de passagem pela maior parte dos matemáticos que não trabalham diretamente com os fundamentos de sua disciplina - aparece concretamente traduzida no ‘livro’ de teoria dos conjuntos dos *Elementos de matemática*. Esse livro foi severamente criticado, sobretudo pelos lógicos, em razão de seu enfoque excessivamente restrito e pelo fato de escamotear a questão dos fundamentos. (MASHAAL, 2012, p. 96).

É polêmica a discussão se Bourbaki estaria morto. Consideramos que suas obras, mesmo não tendo acolhido a contento de todos as consequências do TIG, refletem o modo como a Matemática vem sendo feita após esse teorema e não podemos deixar de lembrar que é dessa forma que a Matemática aprece nos livros das disciplinas específicas nos cursos de licenciatura em matemática.

A reação de Wittgenstein ao TIG

Ao tomarmos conhecimento do senso de humor de Gödel pudemos compreender a postura dele em relação às muitas declarações realizadas por Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951) de objeção ao resultado da incompletude de

---

[19] Do original: “I do not dispute the positive worth of their books nor the magnitude of their achievement; but I suggest that their attitude to logic and to set theory, which has been passed on to younger generations of mathematicians, is harmful because it excludes awareness of perceptions of the nature of mathematics that are invigorating; and I almost venture to suggest that if, as some say, Bourbaki is now dead, he was killed by the sterility of his own attitudes.” (MATHIAS, 1992, p. 8).

Gödel. Essas declarações, segundo Goldstein (2008, p. 100), “eram do tipo que provoca ressentimento, ainda que não existisse nenhum [ressentimento][20] antes”.

Por agora, um vislumbre sobre a heterogeneidade entre esses dois gênios de estilos radicalmente desiguais, pode nos dar uma perspectiva de compreensão sobre a cautela de Gödel: Gödel já frequentara o Círculo de Viena convidado pelo professor Hans Hahn (1879 – 1934) e agia com “sua genialidade hermeticamente fechada não permitindo que quase nada de sua mente elevada se manifestasse”, (GOLDSTEIN, 2008, p. 97), ele “observava sem dizer uma palavra, desde quando entrou no Círculo até quando dispôs da prova rigorosa que falara em nome dele sobre a incompletude da matemática” (p. 97). Gödel, na perspectiva de Goldstein (2008), assistiu ao surgimento do gênio Wittgenstein e presenciou o *enfeitiçamento* provocado por ele nos membros do Círculo.

É intrigante imaginarmos os encontros do círculo de Viena com as diferenças de pontos de vista e de estilos de gênio entre Gödel e Wittgenstein. No mundo-vida que compartilhamos, enquanto pesquisadores na comunidade da Educação Matemática e em nossas universidades, certamente temos vivências que nos permitem imaginar que emoções humanas teriam incitado o dissidente silencioso que confrontava a inspiração divina do filósofo com uma autoridade maior: a Matemática.

Porém tal imaginação nossa não passa de conjectura “dada a opacidade da vida interior de Gödel” (GOLDSTEIN, 2008, p. 97). A respeito de seus teoremas da incompletude, Gödel espontaneamente expôs que o trabalho de Wittgenstein não teve sobre eles influência alguma, além disso, Gödel deixou vir à tona afirmações que Wittgenstein não teria entendido ou teria fingido não entender seus teoremas.

Goldstein (2008) traz nestes termos a questão da influência de Wittgenstein sobre o TIG:

> Claro que influência, num sentido positivo, é bem diferente do tipo de incentivo mais obscuro sobre o qual estou especulando. [...] a influência do filósofo carismático sobre os membros do Círculo pode tê-lo irritado, divertido (mais duvidoso) ou até ajudado a inspirar-se na direção de sua prova: impossível saber. (GOLDSTEIN, 2008, p. 100)

Pura especulação, claro, mas nos parece interessante por trazer uma possível perspectiva humana para essa situação, uma motivação subjacente, muitas vezes não considerada, mas tão possível também em nosso meio acadêmico.

---

[20] [...] Inserção nossa. Outros aspectos do período de vivência comum entre Gödel e Wittgenstein no Círculo de Viena podem ser acessados em Goldstein (2008) e Levin (2009).

Ficamos fervilhando em reflexões sobre o incentivo que aquilo a que nos opomos pode provocar em produções científicas.

A questão sobre o alcance dos resultados da incompletude era o ponto de maior divergência entre os dois em relação ao TIG. Wittgenstein argumentava ao contrário de Gödel em relação aos teoremas. A questão entre eles, depois do TIG, era sobre o alcance do resultado e Wittgenstein nunca admitiu que Gödel tivesse chegado a um resultado, por meio da Matemática, com implicações metamatemáticas.

O resultado da incompletude contrariava o conceito wittgensteiniano de linguagem, de conhecimento, de filosofia. Wittgenstein explicitava seu entendimento que

> A matemática não pode ser incompleta, assim como um sentido tampouco pode ser incompleto. Aquilo que consigo entender devo entender totalmente. Isto está de acordo com o fato de que minha linguagem funciona da maneira que é, e que a análise lógica não precisa acrescentar nada ao sentido presente em minhas proposições para se chegar à clareza completa. (GOLDSTEIN, 2008, p. 160)

Wittgenstein afirmou que os teoremas da incompletude de Gödel eram truques lógicos, destituindo-os assim da importância metamatemática atribuída por Gödel - e na/pela comunidade matemática - ao resultado, repudiando-o de modo extremamente antipático. Goldstein traz que o adjetivo *antipático* que caracteriza a atitude desse filósofo em recepção ao teorema da incompletude foi uma opinião geral entre os matemáticos. E arrisca, ... bem provável também tenha sido a de Gödel (GOLDSTEIN, 2008).

Em palavras de Goldstein (2008) sobre à inflexibilidade de Wittgenstein ao negar a possibilidade de uma prova como a do teorema da incompletude: “nenhum cálculo pode solucionar um problema filosófico. Um cálculo não pode dar informações sobre os fundamentos da matemática” (GOLDSTEIN, 2008, p. 160). Wittgenstein afirmou que não falaria mais sobre o TIG, mas na obra *Observações sobre os fundamentos da Matemática* tentou mostrar que o significado do teorema da incompletude está em conflito com a sua filosofia.

Os pontos de vista de Wittgenstein sobre a matemática principalmente a de que o significado de uma generalização aritmética e a sua prova são controversos. Os comentários de Wittgenstein sobre os teoremas da incompletude, que o próprio Gödel afirmou serem “uma interpretação errônea, totalmente trivial e desinteressante” (GOLDESTEIN, 2008, p. 100). Segundo Silva (2018, p. 99), o lógico e matemático Georg Kreisel, um ex-aluno de Wittgenstein, que declarou em resenha das *Observações sobre os fundamentos da matemática*: "Os pontos de vista de Wittgenstein sobre lógica matemática não têm muito valor, pois ele conhecia muito pouco do assunto e esse pouco restringia-se às mercadorias da linhagem Frege–Russell" (MONK, 1995, p. 441 *apud* Silva (2018)).

No entanto, embora as afirmações de Wittgenstein sejam infundadas, conforme o próprio Gödel e alguns estudiosos de Wittgenstein são conscientes e expressaram sobre isso, o confronto entre Wittgenstein e Gödel em relação à validade e ao alcance do resultado da incompletude foi bastante explorada e há bastante bibliografia a respeito. Em nível pessoal talvez Wittgenstein tenha sido o único opositor que se expressou no nível de negação da aceitação do teorema.

É importante ressaltar que o modo como Wittgenstein reagiu frente ao resultado da incompletude foi diferente de como Hilbert entendeu e acolheu o TIG, embora indigesto ao seu programa e à sua perspectiva filosófica. Enquanto Wittgenstein sequer admitia a existência do resultado, sequer reconhecia a validade do resultado, um teorema matemático devidamente demonstrado, Hilbert sentiu-se contrariado com o resultado que frustrava as expectativas de seu projeto que contava com a prova da consistência dos axiomas de Peano, ou seja, com a prova de que os objetos definidos por tais axiomas existem, mas o TIG estabeleceu que tal prova não pode ser realizada na aritmética.

Compreendendo a acolhida do TIG na Matemática

A receptividade e a convivência com o TIG na Matemática mostra-se na atitude assumida pelo grupo Bourbaki ao enfrentar o fato de que o conjunto dos indecidíveis é não vazio - em teorias que contenham a aritmética - e decidindo que, apesar disso, a atividade de produção matemática continuaria sendo realizada considerando a característica da impossibilidade de se obter simultaneamente a consistência e a completude de teorias simples que tratem da aritmética dos números naturais.

No bojo da questão introdutória sobre as possibilidades de continuidade da Matemática diante do resultado do TIG, Bourbaki em *Eléments*[21] *de Mathématique: Théorie des Ensembles,* expõe que, mesmo sabendo do resultado da incompletude,

[21] "Era um livro texto para ensinar a análise matemática sob novas bases. O título de *Elementos* já indicava o desejo de codificar os estilos de matemática segundo os padrões defendidos pelo grupo, mas aos poucos o empreendimento foi estendido para compreender todos os ramos da matemática. Ao invés da diversificação de métodos e objetos que tinha imperado na matemática até aquele momento." (ROQUE, 2012, p. 475).

valer-se-ia do método axiomático no desenvolvimento de sua proposta de estruturar a Matemática, tendo sempre em vista a possibilidade de uma formalização completa das teorias e com perfeito rigor. O grupo assume, em relação à questão da consistência da aritmética, que, uma vez que, involuntariamente, fosse levado a uma contradição, não permitiria que essa, a contradição encontrada, permanecesse sem tornar inútil a teoria em que ela ocorresse. Esta obra, Bourbaki (1950), a que nos referimos, é o primeiro dos vários livros de Bourbaki e essa afirmação aparece na introdução de sete páginas reservadas à apresentação do método que o grupo se propunha a seguir e as crenças e concepções que os moviam na proposta em divulgação.

A atitude de Wittgenstein, que repugnou veementemente a validade do teorema da incompletude, afirmando que um resultado matemático não poderia ter alcance filosófico em relação aos fundamentos da Matemática, desconsidera o fato de que o TIG é um teorema da aritmética demonstrado na esfera da metamatemática e que permite discussões metamatemáticas e de relações entre Matemática e Lógica alcançando dessa forma os fundamentos da Matemática.

Ao expormos nosso entendimento sobre como a comunidade matemática compreende a Matemática após o TIG estamos expondo como os matemáticos acolheram os teoremas da incompletude de Gödel, que é um resultado matemático que demonstra que os objetos definidos pelos axiomas de Peano não existem. Notem que a consistência da Matemática é algo intuitivamente lógico, isso é consenso entre os matemáticos, conforme Abrahão (2011). Do ponto de vista lógico matemático os teoremas da incompletude de Gödel são discursos matemáticos válidos. O acolhimento da demonstração da incompletude significa lidar com duas coisas: 1) que há verdades aritméticas não podem ser alcançadas pela via lógica matemática; e, 2) que a consistência da aritmética não pode ser demonstrada. Em outros termos significa aceitar que algo intuitivamente óbvio, não pode ser formalmente atestado, sem recorrer, em última instância, à um argumento não matemático, a intuição.

Entendamos: Gödel demonstra que a aritmética possui uma propriedade de não ser possível demonstrar que os todos os objetos que ela trata existem, ou seja, o TIG explicita que há verdades da aritmética que escapam dos métodos matemáticos de provar a existência de objetos matemáticos. Nesse âmbito, perguntas manifestam-se a respeito, principalmente, de como Gödel demonstrou que tal propriedade não pode ser demonstrada. Isso não vem ao caso neste artigo.

Entendemos que esta propriedade pode ser perturbadora, levantando dúvidas sobre a demonstração realizada e sobre como compreendê-la no âmbito dos resultados que herdam essa propriedade.

Os matemáticos assumem que o teorema da incompletude traz uma mensagem de vigor da Matemática e isso ocorre quando compreendem que a consistência de um sistema é saber lidar com os paradoxos, quando e se eles surgirem no sistema. O TIG deixa claro que as teorias que tratam de números naturais não têm condições de provar todas as verdades que podem ser estabelecidas na teoria, o que entendemos que significa que Gödel renomeia *contradição* de *indecidível.* O TIG estabelece que a incompletude é inerente à axiomatização, diante disso transcorre o processo humano de reconhecimento da evidência de que as contradições eram inerentes ao sistema axiomático, enquanto que as escolas filosóficas, com seus projetos de reescrever a Matemática a seus modos, buscavam extirpar as contradições.

Referências

ABRAHÃO, Felipe Sobreira. *Demonstrando a consistência da aritmética*. 2011, 70 f. Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – COPPE/IQ/IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

BATISTELA, Rosemeire de Fatima. O teorema da incompletude de Gödel e os professores de Matemática. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 18., 2014, Recife. *Anais*... Recife: SBEM, p. 1-12.

BATISTELA, Rosemeire de Fatima; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. The Importance of Teaching Gödel's Incompleteness Theorem in Mathematics Teacher Education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, v. 33, p. 1-13, 2018.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; ANTÚNES, Andrés Eduardo Aguirre. (Orgs). *Fenomenologia, Psicopatologia e Neurociências: e a consciência?* Seminários com Angela Ales Bello. Na Universidade de São Paulo. São Paulo: editora da USP, 2016. ISBN: 978-85-86736-69-8.

BOURBAKI, Nicolas. The Architecture of Mathematics. In: *The American Mathematical Monthly.* v. 57, n. 4, p. 221-232, 1950.

BOURBAKI, Nicolas. *Theory of Sets*: Elements of Mathematics 1. Paris: Hermann, 1968.

CHANGEUX, Jean-Pierre; CONNES, Alain. *Matéria pensante*. Lisboa: Gradiva, 1996.

DA SILVA, Jairo José. O segundo problema de Hilbert. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 3, n. 5, p. 29-37, 2003.

DA SILVA, Jairo José. *Filosofias da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

GÖDEL, Kurt. Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In: LOURENÇO, M. (Org.). *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977a. p. 245-290.

GÖDEL, Kurt. Zur intuitionistischen Aritmetik und Zahlentheorie, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, v.4, p. 43-38, 1933.

GOLDSTEIN, Rebeca. *Incompletude:* a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Tradução de I. Koytowski. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

GUERRERIO, Gianbruno. Gödel, um tímido iconoclasta. *Scientific American Brasil*. A vanguarda da matemática: e os limites da razão. São Paulo: Duetto Editorial Ltda. Edição revista e atualizada. Coleção gênios da ciência, n. 8, p. 39-67, 2012.

KLINE, Morris. M*athematics:* The Loss of Certainty. Oxford: Oxford University Press, 1980.

LEVIN, Janna. Um louco sonha a máquina universal. Tradução de I. Korytowski. São Paulo: Conpanhia das Letras, 2009.

MASHAAL, Maurice. Foco na AXIOMÁTICA e nas estruturas. *Scientific American Brasil*. A vanguarda da matemática: e os limites da razão. São Paulo: Duetto Editorial Ltda. Edição revista e atualizada. Coleção gênios da ciência, n. 8, p. 88-98, dez. 2012.

MATHIAS, Adrian Richard David. The Ignorance of Bourbaki. *The Mathematical inteligencer*. v. 14, n. 3. p. 4-13, jun. 1992.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James, R. *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, Gustavo Augusto Fonseca. Observações sobre a Filosofia da Matemática de Ludwig Wittgenstein. *Griot: Revista de Filosofia.* Amargosa, BA. v.17, n.1, p. 97-113, jun. 2018. ISSN 2178-1036.

Submetido em: 22 de Setembro de 2018.

Aceito em: 22 de Abril de 2020.