Educere Et Educare

REVISTA DE EDUCAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

O QUE DIZ O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Dra. Rosemeire de Fatima Batistela
Universidade Estadual de Feira de Santana
Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo
Universidade Estadual Paulista - Rio Claro/SP

RESUMO: Neste artigo são expostos os achados de uma investigação sobre o sentido que o teorema da incompletude de Gödel fez para licenciandos em Matemática e o que, para eles, se mostrou relevante a respeito do teorema da incompletude de Gödel e o ensino de matemática. Os dados foram construídos junto aos estudantes matriculados numa disciplina do oitavo semestre que vivenciaram as atividades e aulas elaboradas por nós e planejadas para 8 horas e 12 horas, respectivamente, nos semestres de 2017.2 e 2018.2, de uma universidade estadual da Bahia. A ideia incompletude de Gödel é entendida pelos estudantes: como uma limitação da Matemática no modo de produzir conhecimento; como a Matemática estando em movimento de completar-se, o que a afasta da visão de uma ciência exata e soberana; como importante para compreender a constituição dos objetos matemáticos, a sua estrutura; como importante para entender o modo de produção de conhecimento matemático; como trazendo ao debate questões filosóficas da Matemática e da Educação Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática; Filosofia da Matemática; Teorema da Incompletude; Formação de professores.

THE MEANING OF THE GÖDEL INCOMPLETENESS THEOREM FOR MATH TEACHER TRAINING COURSES

ABSTRACT: In this article, we present the findings of an investigation on the meaning that Gödel's Incompleteness Theorem had for Mathematics undergraduate students and what, in their opinion, was relevant regarding Gödel's Incompleteness Theorem and Teaching of Mathematics. The data were obtained from students enrolled in the 8th semester course who had experienced the activities and classes prepared by us and planned to be 8 and 12 hours long, respectively, in the second semester of 2017 and in the second semester of 2018, at an Bahia state university. Gödel's incompleteness idea is understood by the students as a limitation of Mathematics in the way of producing knowledge; as Mathematics being in the process of completing itself, which distances it from the vision of an exact and sovereign science; as important for understanding the constitution of mathematical objects and their structure; as important for understanding the way mathematical knowledge is produced; as bringing the Mathematics and Mathematics Education philosophical questions to debate.

KEYWORDS: Mathematics Education; Mathematics Philosophy; Incompleteness Theorem; Teacher training.

1 APRESENTAÇÃO

As autoras compreendem ser importante que professores de matemática conheçam o teorema da incompletude de Gödel (TIG), tendo em vista a mensagem que ele traz. Esse teorema, conforme entendem, incide sobre a Matemática de todos os níveis escolares, pois evidencia o método de produção da Matemática.

O TIG afirma que o conhecimento matemático não pode ser circunscrito no conjunto dos teoremas, pois existem verdades para as quais não é possível estabelecer uma sequência lógica de argumentação para criar as demonstrações delas. Essa informação que o TIG traz sobre o conhecimento matemático abrange a aritmética básica dos números naturais e todos os sistemas correlatos que utilizem os axiomas de Peano.

As teorias nas quais incidem o resultado da incompletude são herdeiras da impossibilidade de atingir suas formalizações finais nas quais todas as verdades das teorias estejam provadas e da impossibilidade de garantir que essas teorias estejam livres de contradições internas.

Batistela (2017) considera que estudantes de licenciatura ao trabalharem com o teorema da incompletude, com as ideias que o envolvem, bem como com as consequências que traz para a Matemática, podem vivenciar experiências significativas e, assim, podem dar-se conta da constituição dos objetos matemáticos, das características desses objetos, da estrutura e das especificidades da Matemática e de método de sua produção. Entendemos que ver essa ciência como sendo pertinente à *racionalia* do mundo ocidental é importante para a cultura matemática dos professores de matemática.

Compreendemos que a ideia da incompletude da Matemática pode contribuir para que os professores de matemática tenham discernimento crítico de que a concepção de soberania da Matemática mitificada como ciência absoluta

DOI: 10.17648/educare.v15i33.22511

entre matemáticos não se sustenta. Assim, podem assumir atitudes que não alimentem essa concepção simplista.

Este artigo traz alguns resultados realizados em uma pesquisa que teve como pergunta norteadora: o *que* a visão de Matemática incompleta trazida pelo teorema de Gödel *diz para o estudante de Licenciatura* em Matemática?[i]

2 DOS DADOS, DA ANÁLISE FENOMENOLÓGICA E DA DISCUSSÃO

Desenvolvemos um projeto de ensino e de aprendizagem do teorema da incompletude de Gödel, conforme apresentado em Batistela (2019), junto a estudantes matriculados numa disciplina do oitavo semestre de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade estadual baiana. Essa proposta realizou-se no segundo semestre de 2017 - (2017.2) - (4 aulas de 2h cada) e no segundo semestre de 2018 - (2018.2) - (6 aulas de 2 horas cada) e teve como sujeitos diferentes estudantes. A proposta desenvolvida em 2018.2 foi redimensionada mediante as análises das descrições realizadas pelos estudantes de 2017.2.

Os dados foram constituídos pelas descrições fenomenológicas do explicitado pelos estudantes de 2017.2 e 2018.2 em resposta, respectivamente, à indagação sobre o que se mostrava importante a eles no concernente à compreensão da Matemática e sobre esse teorema no ensino de matemática.

Destacamos, no movimento de análise e interpretação, dois momentos: o primeiro, caracterizado pela busca das passagens significativas na descrição do expresso pelos estudantes e o segundo pela interpretação das unidades destacadas e pela articulação de convergências. Essas convergências, no fluxo da investigação, foram interpretadas à luz do objetivo-alvo, das questões sobre a Matemática e aquelas concernentes ao próprio curso de Licenciatura em Matemática.

As descrições dos estudantes de 2017.2 evidenciaram o sentido que para eles fazia o TIG e as descrições dos estudantes de 2018.2 afirmaram sobre o teorema da incompletude de Gödel e o ensino de matemática. As descrições foram analisadas e interpretadas, de acordo com a postura fenomenológica, qual seja, a de não partir de pressupostos sobre o indagado. Para tanto, lemos as descrições muitas vezes para entendermos o dito pelos alunos. Em seguida destacamos as passagens que se mostravam significativas, focadas na pergunta formulada. Enumeramos as descrições como E (estudante) de 1 a 12 (2017.2) e de 1 a 10 para 2018.2. Para cada descrição, por exemplo, E1, indicamos os destaques como E.1.1; E1.2; E1.3, etc. No Quadro 1: movimento de análise dos dados, foram traçadas três colunas. A primeira é a descrição dos alunos com os destaques; a segunda, asserções escritas de modo mais claro, na linguagem das pesquisadoras; na terceira são trazidas as ideias, por nós compreendidas, no dito por eles. Esse movimento, o primeiro mencionado, diz respeito à análise ideográfica. No segundo, o da análise nomotética, buscamos por convergências dos sentidos do descrito pelos estudantes, em um movimento de redução fenomenológica, avançando por indicar ideias mais abrangentes.

Tomamos as expressões textuais de 12 estudantes de 2017.2 e 10 estudantes de 2018.2. Em 2017.2, dos dezenove matriculados seis estudantes participaram das 4 aulas e doze participaram de 2 ou 3 aulas. Consideramos como sujeitos significativos para a investigação todos os presentes na quarta aula e que responderam ao solicitado. Pediu-se que descrevessem o que haviam compreendido sobre o tratado no curso, com destaque para o teorema da incompletude de Gödel. Todos os presentes (12 estudantes) expressaram sua compreensão por escrito. Essas descrições integralizam os dados que analisamos assumindo o modo de análise fenomenológico. Porém, não trabalhamos com as 12 descrições. Desconsideramos as descrições dos sujeitos significativos E.6, E.7, E.8 e E.10, uma vez que os estudantes se limitaram a transcrever partes dos textos tomados como base para as aulas e discussões. Não expressaram assim, o por eles compreendido.

As descrições dos alunos de 2018.2 foram numeradas como E (estudante) de 1 a 10 e os destaques foram sinalizados por unidade de significado (us). Para cada descrição, por exemplo, E.1, indicamos o primeiro destaque como us1E.1; o segundo como us2E.1; e assim por diante.

Os dados apresentados no quadro 2 foram constituídos pela descrição fenomenológica de 10 textos produzidos pelos estudantes cursistas ao final das 12 horas aula realizadas em 2018.2. A descrição fenomenológica coincide aqui com as expressões dos estudantes, na íntegra, uma vez que ela traz os trabalhos realizados pelos estudantes.

Os dados expostos no *quadro 1* compõem-se da descrição fenomenológica das respostas dos estudantes a uma questão a respeito do que se mostrou importante no curso realizado em 2017.2 antes da quarta aula, conforme já explicitado. A análise desses dados permitiu-nos alguns entendimentos sobre nossa proposta de curso. Isso conduziu-nos a um redimensionamento do curso proposto, em que incorporamos modificações que interpretamos como importantes. Essas modificações apontadas em Batistela e Bicudo (2018) dizem: i) de trabalhar o significado de uma demonstração para a existência de um objeto na Matemática ao tratar do tema formalismo; e ii) de trabalhar mais a segunda parte da demonstração do TIG para abrir-lhes horizontes de compreensão a respeito do indecidível buscando que se compreenda a necessidade da prova de um objeto para que ele venha a existir matematicamente e assim jogar luz sobre a diferença entre verdade e demonstrabilidade.

Assim sendo, buscamos trabalhar mais amplamente a primeira parte do curso na qual apresentamos as correntes filosóficas que buscam fundamentar a Matemática, bem como, focar mais demoradamente nas atividades da segunda parte da demonstração do teorema da incompletude aquela que traz a argumentação que estabelece a existência da fórmula G indemonstrável. Na primeira parte ampliada, apresentamos o significado atribuído a cada escola filosófica, (logicismo, intuicionismo e formalismo) para os paradoxos que conduziram o debate na Matemática no século XX, apresentando como cada uma delas tratou dessa questão. Por fim exploramos o formalismo e a importância da demonstração para a existência de um objeto na Matemática, expondo e levantando questões e debatendo a respeito de as verdades só serem verdades mediante a demonstração da proposição. Seguindo o fio condutor das ideias debatidas, levantamos a questão da diferença entre verdade e demonstrabilidade que é um aspecto que o teorema da incompletude jogou luz e esclareceu na Matemática existente à época e discutimos o significado de uma fórmula verdadeira ser indemonstrável.

Ao final do curso de 12 h tivemos um intervalo de tempo de uma semana sem aula e algumas leituras complementares[ii] foram sugeridas. No retorno iniciamos uma conversa com os estudantes e marcamos na lousa as palavras que foram significativas para eles durante o curso. Destacaram-se: Gödel, 1931, teorema da incompletude, Matemática, Hilbert, problema 2 de Hilbert, indecidível, formalismo, programa de Hilbert e ensino de matemática. O acesso aos textos e ao uso da internet foi permitido. O texto produzido foi pontuado como parte da nota da terceira unidade da disciplina.

No quadro 1, abaixo exposto, tem-se o movimento de análise dos dados. Na primeira coluna, estão as descrições das respostas dos estudantes à solicitação a eles formulada. Na segunda e terceira colunas estão as asserções escritas de modo mais claro possível por nós, considerando o escrito pelos estudantes, os destaques que realizamos tendo como norte nossa pergunta, as análises e interpretações que realizamos.

Educere Et Educare
Revista de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Estadual do Oeste do Paraná

2.1 Da análise dos dados sobre o sentido do TIG para os estudantes

Quadro 1: Movimento de análise dos dados constituídos em 2017.2

Expressões dos estudantes	Asserções do pesquisador	Ideias expressas
(E.1) - Compreendo sobre a matemática ser consistente e incompleta, pois sempre terá algo a ser questionado, indagado, estará sempre em construção, (E.1.1) porém, que a matemática inconsistente é completa, ao ser completa relata que não mais pode ser feito. E é uma controversa, pois ela está sempre evoluindo. (E.1.2) Com isso percebo que Gödel, com o seu teorema, contribuiu na aritmética assim para toda matemática, pois os fundamentos aritméticos que é o alicerce da matemática (E.1.3), pois a geometria, análise, topologia das áreas depende da mesma. O teorema mostra que a aritmética é incompleta quando impacta o programa de Hilbert, com método axiomático, quando Gödel chega e dizer que tem verdades, que não precisa provar. (E.1.4)	Matemática incompleta significa que sempre tem algo sendo construído e está sempre evoluindo. (E.1.1)	Incompletude como ideia de a Matemática estar em evolução e sempre ter algo sendo construído. (E.1.1) e (E.1.2)
	A Matemática está sempre evoluindo. (E.1.2)	
	O TIG foi provado na aritmética, mas repercute em toda Matemática. (E.1.3)	O TIG provado na aritmética repercute na Matemática. (E.1.3)
	O TIG afirma que há na aritmética verdades que não precisam ser provadas. (E.1.4)	O indecidível de Gödel como uma verdade que não precisa ser provada. (E.1.4)
(E. 2) - O teorema da incompletude de Gödel (TIG) no meu entendimento ele reflete que a matemática não é completa, ou seja, ela tem seguimento onde o TIG mostra falhas para estes seguimentos. (E.2.1) Por exemplo, Gödel utilizou a aritmética para mostrar o indecidível e fazendo isso é como se ele estivesse apontado um contraexemplo para posteriormente fazer uma generalização. (E.2.2) Alguns autores trazem que a matemática é para poucos e se tivermos um conhecimento maior sobre o TIG, acredito eu que podemos desmistificar essa ideia. Já o número de Gödel pra mim só faz sentido nas proposições que fazem sentido, por exemplo, "0=0", "x=y" e entre outras que podem ser formadas. (E.2.3)	O TIG afirma que a matemática não é completa, ela tem partes e ele aponta falhas nessas partes. (E.2.1)	TIG apontando falhas em partes da Matemática. (E.2.1)
	O indecidível foi mostrado na aritmética. Ele foi apresentado como um caso particular que falsifica a hipótese geral e depois dele se fez uma generalização. (E.2.2)	O indecidível como um contraexemplo. (E.2.2)
	Os números de Gödel só fazem sentido nas proposições que fazem sentido. (E.2.3)	Os números de Gödel são construídos segundo uma lógica. (E.2.3)
(E.3) - O teorema de Gödel (TIG) desconstrói a certeza de que a matemática é completa (E.3.1) desta forma o TIG concentra em mostrar que a aritmética que é a base da Matemática é frágil, (E.3.2) ou seja, se para ser consistente a mesma teria que ter prova para todas as coisas, no	O TIG desconstrói a ideia de que a Matemática é completa. (E.3.1)	O TIG quebra a expectativa de que a Matemática era completa.
	O TIG mostra que a aritmética que é a base da Matemática é frágil. (E.3.2)	O TIG mostra que a base da Matemática (a aritmética) é frágil. (E.3.2)

<table>
<tr><td rowspan="4">entanto, busca-se novas formas de demonstrações como a álgebra e a geometria.
Gödel afirma que devido à fragilidade da aritmética, a Matemática é incompleta num sentido não da mesma ser acabada, mas sim de nem mesmo tudo ser provado através dela. (E.3.3)
Os números de Gödel são símbolos que tem validade, pois através destes é possível chegar a várias demonstrações, ou seja, se fazem a "regra" para a prova de qualquer teorema possuindo características próprias e únicas. (E.3.4)
Muita coisa ainda precisa ser estudada para uma melhor absorção do TIG, faltou um pouco mais de exemplos que mostrassem a aplicação desse teorema, e sobre a construção do indecidível, (E.3.5) acredito que Gödel quis mostrar que através de seu próprio número pode mostrar a verdade e a falsidade de um teorema. (E.3.6)</td><td>Devido à fragilidade da aritmética a Matemática é incompleta, isso faz com que nem tudo possa ser provado por meio dela. (E.3.3)</td><td>A incompletude como uma fragilidade da aritmética pois nem tudo pode ser provada
por meio dela. (E.3.3)</td></tr>
<tr><td>Os números de Gödel são símbolos que permitem que se reconheça as demonstrações de teoremas, pois eles possuem características próprias e únicas. (E.3.4)</td><td rowspan="2">Os números de Gödel mostram se um teorema é verdadeiro ou falso. (E.3.4) e (E.3.6)</td></tr>
<tr><td>Os números de Gödel podem mostrar se um teorema é falso ou verdadeiro. (E.3.6)</td></tr>
<tr><td>Uma melhor compreensão do assunto necessita mais estudo. (E.3.5)</td><td>É preciso mais estudos sobre o TIG para melhor compreendê-lo. (E.3.5)</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">(E.4) - Primeiramente, devo registar que até o momento em que estas aulas começaram não havia tomado conhecimento da existência de alguém chamado Gödel. (E.4.1).
Posteriormente, conheci um pouco a história de Gödel, inclusive a sua importância no que diz respeito ao seu teorema da incompletude.
Nos dias em que estive presente nas aulas, descobri que a geometria euclidiana na verdade é a formalização da geometria de Euclides, mas por Hilbert, ou seja, foi formalizada por Hilbert. (E.4.2)
Gödel teve papel importante encontrando inconsistência na teoria do formalismo de Hilbert, consequentemente na aritmética. Pode-se constatar que nenhuma teoria é completa e consistente ao mesmo tempo.</td><td>Não tinha ouvido falar de Gödel. (E.4.1)</td><td>Não sabia da existência de Gödel. (E.4.1)</td></tr>
<tr><td>Nas aulas que esteve presente conheceu que Hilbert formalizou a geometria euclidiana. (E.4.2)</td><td>Tomou conhecimento do projeto do Formalismo de Hilbert. (E.4.2)</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">(E.5) - Não tinha conhecimento do teorema da incompletude de Gödel, (E.5.1) quando a professora Rose iniciou falando a história de Gödel achei muito interessante, mas a forma em que o mesmo morreu me chamou a atenção, pois Gödel morreu de fome achando que todos os alimentos estavam envenenados. (E.5.2) Então no decorrer das aulas tive a oportunidade de conhecer um pouco do logicismo, intuicionismo e formalismo. (E.5.3)</td><td>Não sabia da existência do TIG. (E.5.1)</td><td>Desconhecia a existência do TIG. (E.5.1)</td></tr>
<tr><td>Achou interessante a história de Gödel e o evento de sua morte por não
alimentar-se. (E.5.2)</td><td>Ficou curiosa pelo fato de Gödel ter morrido de fome. (E.5.2)</td></tr>
<tr><td>Nas aulas conheceu sobre o Formalismo, o Intuicionismo e o Logicismo. (E.5.3)</td><td>Aprendeu sobre o Formalismo, Intuicionismo e
Logicismo. (E.5.3)</td></tr>
</table>

Porém, o que me chamou atenção é quando Gödel traz que quando a teoria é inconsistente ela é completa e quando a teoria é consistente ela incompleta. (E.5.4) Desta forma iniciamos a demonstração do teorema de Gödel a parte da aritmetização da matemática foi muito interessante pois chegamos à conclusão que os	Foi interessante saber que Gödel mostrou que se uma teoria é inconsistente ela pode ser completa e se uma teoria é consistente ela será incompleta. (E.5.4)	Despertou curiosidade o fato de uma teoria ser consistente e incompleta e se for completa será inconsistente. (E.5.4)
números de Gödel são todos inteiros e que para ser um número de Gödel tem que seguir uma sequência de números primos. (E.5.5). Logo, no decorrer da demonstração não entendi muito, mas sei que quando o teorema chega ao fim, o mesmo consegue mostrar que a matemática não está pronta e acabada. (E.5.6)	Os números de Gödel são todos inteiros e são construídos segundo uma sequência de números primos. (E.5.5)	Os números de Gödel são construídos por números primos em sequência. (E.5.5)
	O TIG mostra que a Matemática não está pronta e acabada. (E.5.6)	O TIG mostra que a Matemática está em construção. (E.5.6)
(E.9) - Inicialmente nas aulas sobre o teorema da incompletude de Gödel foi necessário falar um pouco sobre o que estava acontecendo. (E.9.1) Pois, um dos fatores de grandes fatores que influenciou o TIG foi o que estava acontecendo no mundo em relação à matemática. (E.9.2) O TIG tem como propósito de mostrar que existe na aritmética formal uma fórmula que é verdadeira, mas não consigo demonstrar. (E.9.3) Por mais que eu esteja concluindo o curso de licenciatura em matemática até o presente momento eu não sabia do teorema da incompletude de Gödel. (E.9.4) O TIG é de suma importância, pois me permitiu conhecer aspectos importantes relacionados à matemática. (E.9.5) No início do TIG de Gödel, o mesmo estrutura um sistema de numeração de Gödel que fica chamado como números de Gödel. Onde o que for verdade nos números de Gödel é verdade nos naturais. (E.9.6) Depois ocorre uma série de procedimentos, onde eu percebi a relação entre x e z como Dem (x, z). Onde x é um fator de z e z é a última linha. (E.9.7) Assim, por consequência ela traz o indecidível (E.9.8) (incompleta). Alguns procedimentos eu não entendi quando fica falando da proposição indecidível. (E.9.9) Por fim, fala sobre a incompletude mostrando que a aritmética é incompleta.	As aulas apresentaram o contexto histórico-cultural da Matemática à época de sua demonstração. (E.9.1)	Nota a apresentação do contexto histórico-cultural nas aulas. (E.9.1)
	O contexto matemático influenciou o TIG. (E.9.2)	O surgimento do TIG foi influenciado pelo contexto matemático à época. (E.9.2)
	O TIG mostra que existe na aritmética formal uma fórmula verdadeira que não se pode provar. (E.9.3)	Na aritmética existe uma fórmula verdadeira que não se pode provar. (E.9.3)
	Nota que não conhecia o TIG. (E.9.4)	Não conhecia o TIG. (E.9.4)
	O TIG permite o conhecimento de aspectos importantes da Matemática. (E.9.5)	O TIG diz sobre aspectos importantes da Matemática. (E.9.5)
	Gödel sistematiza os números de Gödel que reflete neles a verdade nos números naturais. (E.9.6)	Apresenta sua compreensão a respeito da estrutura da demonstração do TIG desde os números de Gödel passando pela relação Dem (x,z) de onde decorre o indecidível. (E.9.6), (E.9.7) e (E.9.8)
	Percebeu a relação entre x, z e Dem (x, z) onde z é a última linha. (E.9.7)	
	Da relação de Dem (x, z) segue o indecidível. (E.9.8)	
	Não compreendeu a parte da proposição indecidível. (E.9.9)	Não compreendeu a argumentação que estabelece a proposição indecidível. (E.9.9)

(E.11) - A teoria de Gödel é uma tentativa de provar que a matemática é incompleta. Para isso, desenvolve um sistema de numeração com base na teoria dos números e na correspondência biunívoca. (E.11.1) Esse sistema de numeração, se transforma após a manipulação em proposições lógicas ou não.	Gödel desenvolveu um sistema de numeração com base na teoria dos números e na correspondência biunívoca. (E.11.1)	Destaca o sistema de numeração dos números de Gödel. (E.11.1)
(E.12) - O teorema de Gödel apresentou essa construção que a partir de algumas suposições conseguiria provar se um número é ou não de Gödel. (E.12.1)	Gödel construiu uma forma de verificar se um número é ou não de Gödel. (E.12.1)	Destaca a parte da construção dos números de Gödel na demonstração. (E.12.1)

2.2 Discussão dos dados sobre o sentido do TIG apresentados no quadro 1

Ao analisar o exposto no quadro acima, entendemos que a incompletude é compreendida pelos estudantes como duas ideias que abarcam diferentes sentidos explicitados: 1) ideia de, na Matemática, sempre haver conhecimento sendo buscado e sendo construído (E.1.1, E.1.2, E.5.6); 2) ideia de falhas ou fragilidade da aritmética, parte e base da Matemática, em provar todas as suas proposições (E.2.1, E.3.2, E.3.3).

Ao expressarem-se sobre a ideia de incompletude na Matemática, os sujeitos significativos afirmam que "a Matemática não está pronta e acabada". Com isso, conforme entendemos, evidenciam ter compreendido que o TIG traz junto a mensagem de que a Matemática continua existindo e em construção.

As descrições dos estudantes evidenciam que não entenderam completamente a demonstração, principalmente na segunda parte em que se constrói e desenvolve a argumentação lógica que conduz ao indecidível, mas que puderam compreender a mensagem do TIG. Nas palavras de uma estudante "no decorrer da demonstração não entendi muito, mas sei que quando o teorema chega ao fim, o mesmo consegue mostrar que a Matemática não está pronta e acabada" (E.5.6). Essa ideia de a Matemática estar em construção é potente no sentido que evidencia características do modo de ser da Matemática, fortalecida pelo TIG. O resultado deste teorema é revigorante, pois, conforme D'Ambrósio

DOI: 10.17648/educare.v15i33.22511

(2003), contraindica a expectativa de uma possível ideia de terminalidade da Matemática, presente no discurso de Hilbert de 1900. Hilbert enfatiza a importância da resolução dos 23 problemas, marcando o fim de uma era e levantando novos problemas que poderiam manter o vigor da pesquisa em Matemática.

Quanto à convergência que diz de falhas em algumas partes da Matemática, entendemos que os alunos dizem de a aritmética não conseguir provar todas as suas proposições. Eles evidenciam entendimento de haver empenho por parte de matemáticos, que buscam dar conta dessas falhas e fragilidades, ainda que seja buscando nas outras teorias.

Entendemos que, embora o TIG seja complexo, do ponto de vista da Matemática e seus modos de produção, os estudantes mostraram-se atentos às ideias que estavam sendo apresentadas. Deram-se conta, conforme consta em seus relatos, de dificuldades que enfrentaram para compreender a demonstração desse teorema, principalmente no que diz respeito à construção do indecidível, seguidas da argumentação que envolve a prova. Evidenciam estar interessados em estudar esse assunto e dizem da necessidade, por eles sentida, de haver mais estudo para que pudessem melhor compreender esse Teorema. “Muita coisa ainda precisa ser estudada para uma melhor absorção do TIG. Faltou um pouco mais de exemplos que mostrassem a aplicação desse teorema e sobre a construção do indecidível.” (E.3.5).

Importante destacar que vários estudantes (E.2.3, E.3.4, E.3.6, E.5.5, E.9.6, E.9.8) referiram-se aos números de Gödel, mostrando ter compreendido a lógica que subjaz ao sistema que produz esses números, permitindo que seja reconhecido se um teorema da metamatemática é verdadeiro ou falso. Entendemos, também, que eles se deram conta de que os números de Gödel é um passo em direção à demonstração do TIG.

Os estudantes E.4.1, E.5.1, E.9.4 afirmaram que até aquele momento do curso não tinham tido conhecimento da existência do TIG e da mensagem do seu resultado. Durante as aulas manifestaram interesse pela literatura apresentada como opção de leitura[iii], visando saber mais sobre a vida de Gödel e de suas peculiaridades. Revelaram ter lhes chamado à atenção "o fato de Gödel ter morrido de fome devido a uma paranoia de que todos os alimentos estavam envenenados" (E.5.2).

Os estudantes sinalizam que no curso tomaram conhecimento sobre as correntes filosóficas da Matemática que buscaram fundamentá-la, a saber, Formalismo, Intuicionismo e Logicismo (E.4.2, E.5.3). Mostraram-se envolvidos com o tema trabalhado, pois ficaram atentos e interessados em relatar os assuntos tratados em cada dia da aula. Descreveram os tópicos trabalhados em cada um dos três dias transcorridos de curso, apontando o que entenderam e o que consideravam precisar trabalhar mais. Evidenciaram, também, compreensão sobre a importância do TIG na Matemática e sua repercussão ao exercer impacto sobre o projeto de Hilbert.

Com relação ao indecidível os estudantes evidenciaram entendê-lo como uma verdade que não precisa ser provada e, no âmbito da demonstração, o veem como uma exceção à regra geral. Nos termos de um estudante "Gödel utilizou a aritmética para mostrar o indecidível e fazendo isso é como se ele estivesse apontado um contraexemplo para posteriormente fazer uma generalização". Isso nos diz que o nível de compreensão deles a respeito dos processos matemáticos, como teoremas, provas e deduções, que diz do que o raciocínio dedutivo envolve em Matemática parece estar claro a eles.

2.3 Da análise dos dados sobre o teorema da incompletude no ensino de matemática

No quadro 2, abaixo exposto, tem-se o movimento de análise dos dados de 2018.2. Na primeira coluna, estão os textos construídos pelos estudantes contendo as palavras chave que elegemos na aula. Na segunda coluna estão a ideias que entendemos que os textos trazem nos destaques que realizamos tendo como norte nossa pergunta que diz que focar o teorema da incompletude e o ensino de matemática.

Quadro 2: Movimento de análise dos dados sobre o TIG e o ensino de matemática

DOI: 10.17648/educare.v15i33.22511

Expressões dos estudantes cursistas de 2018.2	Ideias expressas na linguagem do pesquisador
(E.1) Em 1931, Kurt Gödel publicou o artigo "sobre proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas correlatos". Nesse artigo há a primeira menção acerca do Teorema da Incompletude de Gödel (TIG). Na época de sua publicação, o teorema cai como uma bomba entre os pesquisadores de matemática da época, que acreditavam que a matemática era superior e só era necessário ela mesma para ser completa. No contexto histórico do lançamento dos artigos, a escola formalista, tentava provar que a matemática era consistente e tudo pertencente a ela era demonstrável. Hilbert tentava mostrar, a partir da aritmética dos números naturais (axiomas de Peano), que a matemática era completa e que tudo podia ser posto em prova. É justamente por isso que o TIG cai como uma bomba, principalmente para os formalistas, para Gödel, em sua obra, ele diz que é impossível axiomatizar e demonstrar os teoremas da aritmética em um sistema que inclui a própria aritmética. Gödel em sua obra questiona a demonstrabilidade de tudo e conclui que para os instrumentos da época, a matemática apresentava um limite, que nem tudo poderia se utilizar de sequencias lógicas para se criar demonstrações, mas que nem por isso, algumas coisas não eram verdade. Para ele, existiam verdades indemonstráveis, e que continuavam verdades e se faziam necessárias para que existissem coisas que realmente podiam ser demonstradas. Gödel também criou um sistema que tornava as demonstrações únicas a partir da numeração dos símbolos presentes na matemática, portanto cada proposição forma um número de Gödel e associadas às outras proposições forma a demonstração do número de Gödel "z". As proposições combinadas em linhas virando uma demonstração fazem parte de uma sequência de fórmulas, que estão presentes na matemática, ao transformar essa sequência em um número de Gödel, transportamos essas demonstrações para a metamatemática, sendo esta uma linguagem matemática feita usando a matemática. Ele fez essa linguagem no intuito de mostrar que cada demonstração era única, mas que nem sempre um número de Gödel poderia ser uma demonstração válida ou verdadeira. Em seu teorema, Gödel, em resumo, diz que há sentenças que são indecidíveis e que a partir dessas sentenças não havia como provar que a parte da aritmética era consistente. Apesar do TIG focar na aritmética, as suas contribuições irradiam para as outras áreas o que torna a matemática "incompleta", mas no sentido de que não há instrumentos suficientes para provar que aquelas verdades são demonstráveis. O ensino da matemática é melhorado quando os licenciandos entendem que a matemática é incompleta e incompletável, e que há verdades não demonstráveis hoje. Há também a dúvida da necessidade de se demonstrar tudo aos alunos da educação básica. O TIG mostra e faz refletir que algumas coisas não há necessidade de formalização. Também há a necessidade de deixar claro aos alunos o limite da matemática e o porque de existirem esses limites. (us1E1)	É importante promover o entendimento dos licenciandos a respeito da incompletude da matemática, dos limites e das razões desses limites. O conhecimento de que a Matemática é incompleta e incompletável e que atualmente há verdades indemonstráveis pode melhorar o ensino de matemática, pois o TIG faz refletir que nem tudo é formalizável e esclarece dúvidas sobre a necessidade de demonstrar tudo na escola básica.
(E. 2) Uma breve discussão sobre modelos teóricos para a matemática/o formalismo em cheque Ao longo da história a Matemática foi motivo de grandes discussões, muitas delas mudaram o modo de se fazer matemática, e revolucionaram esta ciência. Dois dos principais momentos da matemática foram o "formalismo" e a "queda do formalismo" (pelos Teoremas de Gödel). Para falar em matemática é preciso reconhecer os axiomas de Peano para a aritmética. A partir disso, chegaremos ao Formalismo por Hilbert. Hilbert com seus estudos e análises sobre o método axiomático para a comprovação de uma teoria, assim Hilbert buscou descrever um modelo mais consistente para uma teoria matemática. Ele acreditava que toda matemática tradicional poderia ser formalizada por meio de axiomas bem escolhidos. Assim, Hilbert propôs que (o método axiomático) poderia ser provado consistente por meios estritamente finitos.	É importante os professores conhecerem e compartilharem com os alunos o modo pelo qual a matemática é produzida e formalizada, bem como, sobre o método axiomático. O TIG sinaliza que é preciso que os professores revejam o modo como difundem as ideias matemáticas e conheçam as

É possível notar que muitos teóricos da matemática buscaram propor teorias que abrangesse toda esta ciência, porém, com um campo tão vasto fica difícil a definição de um modelo 100% eficaz. O formalismo estruturou a matemática por muito tempo e mesmo assim não pôde garantir toda verdade matemática pelo seu modelo. No formalismo temos que a matemática é o que pode ser feito com a teoria axiomatizada dos conjuntos utilizando a lógica clássica de predicados de primeira ordem". Desta forma, podemos abrir uma discussão sobre a verdade e demonstrabilidade" será que toda verdade pode ser demonstrada? Verdade é igual a demonstrabilidade? – Vimos ao longo da disciplina Evolução da Matemática que "verdade ≠ demonstrável", e na matemática nem tudo pode ser demonstrado e nem por isso deixar de ser verdade. Como afirma Gödel, "uma teoria que possuem os números não pode-se provar todas as suas verdades". Este foi um choque para o formalismo de Hilbert. Pois, Gödel utilizando a metamatemática (da aritmética) demonstra que os sistemas axiomáticos formalizados não conseguirão jamais abranger toda a riqueza da matemática. A matemática/aritmética é incompleta e incompletável. Desconstruindo o sonho de Hilbert, Gödel nos mostra que é preciso rever o modo como difundimos as ideias matemática e que como professores nos cabe saber as características do que estamos ensinando. (us1E2) O teorema da incompletude de Gödel é o maior resultado lógico da matemática. Mesmo este limitando as abrangências do Formalismo, temos o formalismo como modelo que mais impera até hoje. Ao analisar estes aspectos da história da matemática fica claro a importância de os professores conhecer e compartilhar com os alunos o modo como a matemática é produzida e formalizada sobre o método axiomático. (us2E2)	características do que estão ensinando.
(E.3) A escola formalista de Hilbert que procurava uma teoria rigorosa que pudesse descrever toda a matemática, com um pensamento de que tudo na matemática estava dividido em dois grupos: o que já foi provado formalmente e que ainda deveria ser provado. Considerando a matemática como algo inesgotável, Gödel entendia que a matemática não pode ser totalmente expressa em uma linguagem como o que era proposto pelos matemáticos formalistas da época. A partir dos desdobramentos desse pensamento Gödel desenvolve o teorema da incompletude se utilizando da aritmética e dos axiomas de Peano de forma de cada símbolo da aritmética tenham um único correspondente chamado seu número de Gödel, utilizando assim a metamatemática. Com isso o teorema enuncia que qualquer teoria axiomatizada utilizada para expressar a aritmética é incompleta. É importante esclarecer que Gödel não pretendia derrubar o programa de Hilbert mas quando o teorema da incompletude foi divulgado acabou abalando a sociedade matemática da época que apoiava-se no formalismo e desfazendo o sonho de Hilbert de formalizar e desfazendo o sonho de Hilbert de formalizar toda matemática e também criando um grupo de coisas que não tem como ser provadas. Com esse resultado Gödel mostra que nem tudo na matemática possui demonstrabilidade que nem por isso não são consideradas verdades para que certas teorias tenha sentido, mostrando assim, que a matemática ou melhor os métodos utilizados para demonstrações matemáticas não são perfeitos e possuem um limite. Em 1936, o lógico Alonso Church publica o teorema da indecidibilidade, trazendo à tona a existência de proposições que não podem ser classificadas como verdades, o chamado indecidível. Trazendo o teorema de Gödel para os dias atuais no ensino de matemática podemos dizer que precisamos ter consciência de que a matemática não é perfeita e possui seus limites. (us1E3)	Os professores precisam ter conhecimento a respeito de a Matemática não ser perfeita e possuir limites.
(E. 4) O Teorema da Incompletude de Gödel (TIG) é um teorema que estabelece limitações a quase todos os sistemas axiomáticos. É um teorema importante tanto para a lógica matemática quanto para a filosofia da matemática e evidencia a incompletude de grandes partes das teorias matemáticas que	Para os professores de matemática é importante o conhecimento de como

apresentam em sua base axiomática os axiomas da aritmética dos números naturais de Peano. A consciência e compreensão do poder de um sistema axiomático são de suma importância para aqueles que trabalham com o ensino de Matemática. (us1E4) Desse modo, faz-se necessário o encontro entre alunos do curso de licenciatura em Matemática com o TIG. O contato desses alunos com ideias centrais desse teorema gera uma aproximação com a noção de incompletude, que está relacionada com várias teorias da Matemática. Entender como a matemática constrói suas teorias é um ato de importância, uma vez que isso gera uma maior criticidade e um maior pensar crítico sobre a Matemática e suas estruturas. (us2E4) Do ponto de vista filosófico, o TIG oferece às pessoas a oportunidade de serem protagonistas no processo de construção das teorias matemáticas pois o TIG oferece um encontro com o indecidível e consequentemente com a percepção que determinado sistema formal não é capaz de decidir sobre a veracidade de alguma afirmação. Nesse sentido, quando o sujeito ganha o poder de reinterpretar logicamente os conceitos matemáticos a matemática passa a considerar a vivência desse sujeito, os aspectos histórico, social e cultural. Para uma melhor compreensão do TIG é importante falarmos sobre sua história e o contexto em que surgiu. No final do século XIX a filosofia do conhecimento era considerada um bloco monolítico e muitos intelectuais da época consideravam que haveria pouca coisa fundamentalmente nova a ser descoberta. E, em 1900, no Congresso Internacional de Paris de Matemática, David Hilbert apresentou um trabalho que viria a para completar todo o escopo da Matemática. Hilbert tinha a pretensão de desencadear um esforço geral da comunidade científica com o intuito de completar a fundamentação lógica da matemática. Entretanto, em 1931, Gödel publicou o seu trabalho "Sobre Proposições Indecidíveis" o que colocou fim nessa expectativa. Como as afirmações da teoria formal estão escritas na forma simbólica é possível verificar mecanicamente que uma prova formal de um conjunto finito de axiomas é válida. Essa tarefa conhecida como verificação automática de provas é relacionada à demonstração automática de teoremas. A diferença é que ao invés de construir uma nova prova o verificador de prova simplesmente checa se a prova formal conhecida é correta. Muitas teorias de interesse incluem um conjunto infinito de axiomas. Neste caso, para verificar uma prova formal, deve ser possível verificar se a afirmação tida como axioma. Esse fato surge nas teorias de primeira ordem da aritmética como a aritmética de Peano. É válido lembrar que as conclusões do TIG só são provadas para as teorias formais que satisfazem as hipóteses necessárias. Nem todos os sistemas satisfazem essas hipóteses, mesmo quando esses sistemas têm modelos que incluem os números naturais como um subconjunto. Isso mostra os limites do TIG. Além disso, Gödel utilizou a metamatemática para mostrar que sistemas axiomáticos formais não possuem o poder de alcançar a riqueza da Matemática.	as teorias matemáticas são construídas e sobre o poder de um sistema axiomático, pois isso pode gerar uma visão crítica sobre a Matemática e suas estruturas.
(E.5) A partir dos estudos de Hilbert, no contexto do formalismo, onde a matemática é apresentada como uma ciência do possível, e assim não implica contradição, se apoiando na aritmética dos números naturais provando que os axiomas de Peano eram consistentes, Hilbert pretendia axiomatizar todo o corpo de conhecimento matemático entendendo assim que a matemática pode ser construída como simples cálculo sem exigir interpretação alguma. Nesse sentido, em 1931, Gödel excluía a possibilidade da matemática como sistema único e total, mostrando que a consistência dos axiomas da aritmética de Peano não pode ser realizada indicando a existência de um sistema indecidível e assim o indecidível nos obriga a reconhecer uma limitação, realizando um mapeamento de que a aritmética é incompleta. Além disso, Gödel, no sentido de demonstrar a não contradição com relação a análise matemática e a aritmética de Peano, insere o questionamento acerca da verdade-demonstrabilidade, pensando no sentido de que uma proposição verdadeira pode ser demonstrável ou não, e nesse sentido de que uma	O TIG busca entender como é a matemática e ele indica que o que aprendemos na universidade relaciona-se com o que ensinamos na escola básica. Ao estudar matemática, falar do TIG nos faz refletir sobre a matemática ensinada na escola, a qual muitas vezes é ensinada como tendo resposta para tudo. É preciso ensinar

proposição verdadeira pode ser demonstrável ou não, e nesse sentido entende-se que verdades são sempre verdades, e isto deriva de um fato cultural e não apenas um resultado de uma demonstração. O Teorema da Incompletude de Gödel é pensado no contexto da metamatemática onde buscava-se entender como é realizada a leitura matemática da matemática, indicando que o que aprendemos na Universidade e na escola menciona uma relação com o TIG.Assim, falar do TIG no contexto do ensino de matemática nos faz refletir acerca da utilidade da matemática ensinada na escola, onde muitas vezes se encontra sentido de que tem resposta para tudo e é preciso ensinar o estudante a pensar e a pensar de modo matemático, dar sentido ao que está sendo ensinado, pensando assim na utilização do método axiomático ao ensinar os alunos da educação básica. (us1E5)	a pensar matematicamente e dar sentido ao que está sendo ensinado, refletindo sobre a utilização do método axiomático ao ensinar os alunos da Educação Básica.
(E.6) A matemática é construída por teoremas, axiomas, postulados estabelecidos sobre uma base. A matemática é simplesmente o estudo de estruturas ou padrões formais de associação. O rigor em que a Matemática é apresentada, estabelece regras e leis e sua consistência é amparada pela demonstração daquilo que é defendida como verdade. O matemático Giuseppe Peano resumiu as características estruturais dos números naturais em uma lista de axiomas. Dentre vários matemáticos, o alemão Hilbert ganha notoriedade pelo conceito moderno de formalismo e a criação da escola formalista. Ele defendia que a Matemática era um sistema puramente formal, cujo o uso de regras e mecanismos conduziram à prova da veracidade ou falsidade de todas expressões formuladas em tal sistema. Hilbert pretendia axiomatizar todo corpo de conhecimento matemático (inclusive com objetivo de provar tudo, que todo problema matemático fosse solúvel. Em 1931, Gödel fundava uma nova lógica. A publicação do seu artigo "sobre as proposições indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas correlatos". O Teorema da Incompletude de Gödel – TIG é um resultado da lógica matemática que evidencia uma característica dos sistemas formais utilizados na Matemática. Para Gödel não existe uma matemática pura uma linguagem absolutamente segura. O TIG foi visto como a maior descoberta lógica. A façanha de Gödel residirá na invenção de um meio para superar a barreira entre os diferentes níveis de linguagem. Esse teorema resultou na apresentação de que o método axiomático está sujeito à uma limitação fundamental no poder deste método. O aviso de Gödel sobre a existência de uma sentença indecidível no sistema formal da aritmética dos números naturais e que esse sistema não podia provar a sua própria consistência. Esse anúncio abala o sonho de Hilbert que estava empenhado em construir uma teoria rigorosa capaz de descrever toda a matemática. O conhecimento da matemática no ensino de Matemática contribui para nos aproximar das questões filosóficas que os lógico-matemáticos tratavam em seus estudos. (us1E6)	O conhecimento de questões relacionadas à Matemática contribui para aproximar os estudantes de questões filosóficas, nesse caso em que os lógicos matemáticos estavam tratando à época do surgimento do TIG.
(E. 7) Baseado no Teorema da Incompletude de Gödel (TIG) podemos perceber que a matemática é uma ciência em construção. Existia uma preocupação por parte de alguns matemáticos, por exemplo Hilbert, em provar todas as verdades matemáticas. Para eles se assim o conseguissem teríamos uma ciência nem formuladas, consistente e acabada. É nesse ponto que, em 1931, Gödel publica seu teorema dando um passo importante para a matemática. O TIG não desconstrói, o que até então tinha sido posto, ao contrário, fornece mais instrumentos para a ciência uma vez demonstrada a ideia do indecidível. Hilbert foi um dos teóricos que tentou formalizar e construir uma teoria rigorosa capaz de descrever toda a matemática. Com isso, ele com o objetivo de complementar e formalizar (os ELEMENTOS DE EUCLIDES ele constrói sua	O conhecimento do teorema da incompletude é importante para desencadear reflexões que levem à compreensão de que a Matemática tem limitações.

obra "FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA" que tem a intenção de esclarecer possíveis pontos que não estavam claros na obra de Euclides.) As tentativas de Hilbert não foram bem sucedidas, uma vez com o TIG, chega-se a conclusão que existem limitações na teoria matemática e sendo que nem todas as verdades são demonstráveis. No ensino de matemática, em especial, nos estudos sobre aritméticas (~~e geometria~~) utilizamos os axiomas de Peano (~~e as teorias de Euclides~~), reforçando que Gödel não destruiu essas teorias, ele prova que existe um limite na matemática, que essa ciência está em fase de construção é consistente porém não está completa. Para estudantes de licenciatura em matemática conhecer este teorema é importante pois possibilita uma reflexão sobre a teoria da matemática fazendo-o perceber que esta ciência tem limitações. (us1E7) Gödel utilizou-se da matemática da aritmética para demonstrar a limitação do modelo formalista provando que o modelo axiomático não consegue dar conta de toda verdade matemática.	
(E. 8) No que se refere ao teorema da incompletude de Gödel, não pode-se deixar de falar do formalismo de Hilbert que para sua época foi importante. Hilbert pensava que a matemática não possuía limites que ela era completa e autodemonstrável porém, começaram a aparecer paradoxos e questionamentos sem solução mas para Hilbert faltava empenho dos pesquisadores para resolvê-los. Em 1931 Kurt Gödel publica um artigo com a descoberta do teorema da incompletude e afirma a existência do indecidível verdades que não podem ser provadas (demonstradas), percebe-se que o sistema formal não era capaz de decidir a veracidade de uma proposição. O teorema foi de grande importância mas gerou instabilidade principalmente em meio aos formalistas. Para o formalismo todas as verdades em matemática precisavam ser demonstradas ou seja verdade era sinônimo de demonstrabilidade, o formalismo ainda buscava fundamentar toda a matemática na aritmética dos números naturais e ainda que a matemática poderia fundamentar-se, diferente do que pensava Gödel. O teorema da incompletude afirma que uma teoria não pode ser completa e consistente e que uma teoria não pode provar sua própria consistência afirma a existência de uma proposição aritmética indecidível para tal demonstração usa como ferramenta as regras da lógica. Sua demonstração transita entre a matemática e a matemática a partir do momento em que da sequência de fórmulas ele atribui um número de Gödel e conclui-se que toda teoria baseada nos axiomas de Peano são inconsistentes, estes não são capazes de fundamentar a teoria. O estudo do teorema da incompletude de Gödel na escola pode levar o aluno a compreender as limitações da matemática e de grande parte de suas teorias. (us1E8)	O conhecimento do teorema da incompletude de Gödel possibilita aos professores a compreensão das limitações da matemática e de grande parte de suas teorias.
(E. 9) Em 1931, enquanto as melhores cabeças voltaram-se para a construção do monumental edifício da matemática, um discreto estudante chamado Gödel estabelecia a base para uma nova lógica. Gödel usa termos como verdadeira ou demonstrável para dizer que os sistemas axiomáticos formalizados não conseguirão jamais abranger toda a riqueza da matemática. Com essas afirmações ele desfaz da formalização dos axiomas criados por Hilbert. Por conta dessa descoberta Gödel recebeu críticas e elogios de diversos matemáticos que não compreenderam a importância do seu teorema da incompletude que logo se tornaria a maior descoberta lógica de todos os tempos. Portanto Gödel foi o primeiro a falar sobre o teorema e concluir que é impossível definir um sistema de axioma completo que seja simultaneamente consistente. Logo este sistema será completo ou consistente. Gödel ainda nos diz que o sistema só é completo se dentro dele for possível provar qualquer afirmação ou sua negação a partir dos axiomas.	

Entretanto devemos fazer uma ressalva sobre o teorema de Gödel: só será aplicada no sistema que sejam capazes de conter a aritmética. Essa aritmética utilizada por Gödel no seu sistema é baseada nos axiomas da base da matemática criado por Peano. Ainda tomando como base o teorema da incompletude de Gödel é impossível não observar que o indecidível nada mais é do que uma simples consequência do indecidibilidade.	
(E.10) Em 1931 um jovem matemático Kurt Gödel fez uma descoberta poderosa conhecida como “teorema da incompletude”. Esse teorema da incompletude de Gödel diz que “qualquer teoria efetivamente gerada capaz de expressar aritmética elementar não pode ser tanto consistente quanto completa. Em particular para qualquer teoria formal consistente e efetivamente gerada que prova certas verdades aritméticas básicas existe uma afirmação aritmética que é verdadeira, mas que não pode ser provada em teoria.” Hilbert propôs o programa de Hilbert, como uma meta estabelecida para os matemáticos para formalizar a matemática e provar que a mesma está livre de contradições, até que Gödel provou nos seus teoremas da incompletude que o objetivo de Hilbert não pode ser alcançado. Vale destacar que a teoria de Gödel só se aplica em teorias recursivamente enumerável, sendo uma teoria limitada. A teoria axiomática é tida como efetivamente gerada se seu conjunto de axiomas e um conjunto recursivamente enumerável, teorias efetivamente geradas com conjunto infinito de axiomas incluem a aritmética de Peano vindo o teorema de Gödel mostrar que certos casos não é possível obter uma teoria efetivamente gerada, completa e consistente. O teorema da incompletude de Gödel provocou grandes impactos na matemática afirmando que nem todas as suas verdades *pode* ser provadas, no caso não há sua demonstrabilidade. O teorema da incompletude de Gödel é muito importante para o ensino da matemática, principalmente nos cursos de licenciatura em matemática, pois muitos estudantes entram no curso com o pensamento que a matemática é completa e que todas as suas verdades *requer* provas. Apresentar esse teorema para esses estudantes é de grande valia para desfazer esse conceito criado por eles. (us1E10)	O conhecimento do teorema da incompletude permite a mudança de concepção dos estudantes de licenciatura em matemática de que a Matemática é completa e evidencia que todas as suas verdades requerem prova.

No quadro 3, a primeira coluna é a cópia da segunda coluna do quadro 2 e na terceira está a análise das ideias presentes e as interpretações que realizamos.

Quadro 3: continuação do movimento de análise dos dados de 2018.2

	Ideias expressas na linguagem do pesquisador	Das ideias presentes nas aulas
E.1	É importante promover o entendimento dos licenciandos a respeito da incompletude da matemática, dos limites e das razões desses limites. O conhecimento de que a Matemática é incompleta e incompletável e que atualmente há verdades indemonstráveis pode melhorar o ensino de matemática, pois o TIG faz refletir que nem tudo é formalizável e esclarece dúvidas sobre a necessidade de demonstrar tudo na escola básica.	É importante trabalhar com o TIG para promover reflexões que levem os licenciandos a conhecerem as limitações da Matemática e de parte de suas teorias, bem como as razões dessas limitações. A razão dessas limitações seria que a Matemática é incompleta e incompletável contendo verdades indemonstráveis.
E.2	É importante os professores conhecerem e compartilharem com os alunos o modo como a matemática é produzida e formalizada e sobre o método axiomático.	

	O TIG sinaliza que é preciso que os professores revejam o modo como difundem as ideias matemáticas e conheçam as características do que estão ensinando.	A questão de utilizar demonstrações ao ensinar na escola básica parece ser uma dúvida para os estudantes. Um deles expressa “Há também a dúvida da necessidade de se demonstrar tudo aos alunos da Educação Básica. O TIG mostra e faz refletir que algumas coisas não há necessidade de formalização.” Essa declaração nos permite interpretar que houve o entendimento que o TIG afirma não ser necessário formalizar tudo e isso autorizaria a não utilização de demonstrações na escola básica sob o respaldo de haver na interpretação dele, a não necessidade de demonstrar. Na afirmação pode-se ler que o TIG esclarece sobre a dúvida e permite entender que a formalização não é necessária em algumas coisas e que melhorar o ensino seria pela via de o professor saber que nem tudo pode ser demonstrado. O teorema da incompletude de Gödel permite entender como as teorias matemáticas são construídas e sobre o poder de um sistema axiomático A compreensão das estruturas da Matemática, que é focada quando se estuda o teorema da incompletude, pode ajudar o professor a ensinar os alunos a pensar matematicamente e dar sentido ao que está ensinando. O conhecimento de eventos que recaíram sobre a Matemática contribui para aproximar estudantes da licenciatura às questões filosóficas que os lógicos estavam tratando à época do TIG.
E.3	Os professores precisam ter conhecimento que a Matemática não é perfeita e possui limites.	
E.4	Para os professores de matemática é importante o conhecimento de como as teorias matemáticas são construídas e sobre o poder de um sistema axiomático pois isso pode gerar uma visão crítica sobre a Matemática e suas estruturas.	
E.5	O TIG busca entender como é a matemática e ele indica que o que aprendemos na universidade relaciona-se com o que ensinamos na escola básica. Ao ensinar matemática, falar do TIG nos faz refletir sobre a matemática ensinada na escola que muitas vezes é ensinado que tem resposta para tudo e é preciso ensinar a pensar matematicamente e dar sentido ao que está sendo ensinado refletindo sobre a utilização do método axiomático ao ensinar os alunos da educação básica.	
E.6	O conhecimento de questões relacionadas à Matemática contribui para aproximar os estudantes de questões filosóficas, nesse caso que os lógicos matemáticos estavam tratando à época do surgimento do TIG.	
E.7	O conhecimento do teorema da incompletude é importante para provocar reflexões que levem à percepção de que a Matemática tem limitações.	
E.8		
E.9	O conhecimento do teorema da incompletude de Gödel possibilita aos professores a compreensão das limitações da matemática e de grande parte de suas teorias.	
E.10	O conhecimento do teorema da incompletude permite a mudança de concepção dos estudantes de licenciatura em matemática de que a Matemática é completa e todas as suas verdades requerem prova.	

2.4 Discussão dos dados analisados nos quadros 2 e 3

E6 afirma que o trabalho com o teorema da incompletude na licenciatura é uma oportunidade fortuita para conhecer sobre a Matemática e assim aproximar os licenciandos de questões filosóficas relacionadas à lógica matemática. Afirma que estudar esse teorema lança luz sobre a relação entre a Lógica e a Matemática. Afirma ver nesse teorema uma possibilidade de trabalho com Filosofia em cursos de licenciatura, apoiado em temas matemático e lógico.

E.1; E.3; E.7; E.9; E.10, em seus trabalhos, explicitam a importância de estudar o TIG, pois esse teorema desencadeia reflexões que conduzem os licenciandos a pensar sobre teorias da Matemática e sobre limitações de parte de suas teorias e respectivas argumentações. Essas reflexões podem contribuir com o ensino de matemática, na medida em que o professor de matemática, compreendendo as potencialidades e as limitações do pensar matemático, pode se despir de ilusões sobre a exatidão e certeza da Matemática.

As limitações acima referidas dizem respeito aos indecidíveis que Gödel demonstrou que existem na aritmética básica dos naturais e em todos os sistemas formais correlatos. A afirmação sobre essas limitações se pauta na compreensão de que Matemática contém em si verdades indemonstráveis. Essa ideia contribui com a compreensão da diferença entre verdade e demonstrabilidade, importante a ser trabalhada com estudantes dessa ciência.

A questão de utilizar demonstrações ao ensinar na escola básica parece ser uma dúvida para os estudantes. Um deles expressa "Há também a dúvida da necessidade de se demonstrar tudo aos alunos da educação básica. O TIG mostra e faz refletir que algumas coisas não há necessidade de formalização". Essa declaração nos permite interpretar que houve o entendimento que o TIG afirma não ser necessário formalizar tudo e isso autorizaria a não utilização de demonstrações na escola básica sob o respaldo de haver na interpretação dele, a não necessidade de demonstrar. Compreendendo-a, fortalecemos nossa proposta de trabalha com o TIG em cursos que formam professores de Matemática.

Pelas afirmações trazidas nos trabalhos dos alunos, entendemos que não podemos nos furtar à discussão que considere a presença da Filosofia da Matemática e Filosofia da Educação Matemática em cursos de licenciatura. É sabido que os cursos de licenciatura se adaptam às exigências do Conselho Nacional de Educação (CNE)[iv] e as decisões sobre currículo, tomadas no âmbito dos Colegiados dos cursos, buscam tomar as recomendações sugeridas e realizar as alterações necessárias, mantendo a identidade do curso, numa visão que tem como norte prover no curso a matemática que o professor de matemática deve saber. Essa discussão é amplamente conhecida por nós professores de universidades e, na luta política pela Educação Matemática, raras vezes consegue-se impor essas ideias junto aos demais membros das outras áreas que compõem o Colegiado. Na maioria das vezes, o critério adotado para as alterações é o da utilidade do conhecimento para o professor quando do seu trabalho em sala de aula. No rastro dessa visão, o curso acaba por refletir, em seu currículo, o entendimento de que as disciplinas têm por meta acrescentar conteúdos que serão diretamente utilizados pelo professor ao trabalharem na Educação Básica. O critério de utilidade direta do conteúdo é, portanto, o que acaba sendo eleito. Muitos licenciandos terminam o curso de licenciatura com a ideia de que contextualizar os assuntos matemáticos culturalmente e/ou socialmente é suficiente para que os estudantes da Escola Básica se interessem e, consequentemente, apresentem bom desempenho em matemática. Reforçam, assim, a visão de ensino que tem como meta a utilização imediata do conteúdo.

Esse clima da valorização das produções que tenham utilidade direta e imediata tem imperado no Brasil há tempo e reflete-se nos currículos da Escola Básica, retirando a obrigatoriedade das disciplinas de Filosofia e Sociologia, por exemplo. Fundamentado nesse mesmo raciocínio, os governos federal, estadual e municipal, na grande maioria das vezes, decidem a respeito de investimentos na Educação.

Não é nosso foco aqui a discussão sobre a hierarquia da utilidade das produções científicas ou das disciplinas em cursos de licenciatura que mais atendem ao Ensino Básico. Nossa defesa pelo ensino do teorema de Gödel, conforme já anunciamos neste texto, diz principalmente da compreensão sobre o método axiomático com o qual toda a matemática, entendida como ciência da civilização ocidental, e inclusive aquela ensinada na Escola Básica, é construída.

Destacamos que o teorema da incompletude tem o potencial de ser um conhecimento que ao ser tratado em cursos de licenciatura em matemática permite que os licenciandos vivenciem reflexões plausíveis e coerentes com o nível de conhecimento matemático que eles apresentam ao terem vivenciado os cursos realizados em outras disciplinas que não apresentam a estrutura da ciência matemática, seu método de produção, bem como não discutem aspectos filosóficos a respeito do potencial e limites dessa ciência.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino do teorema da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura é relevante tanto para o conhecimento dos próprios licenciandos a respeito da Matemática quanto às atitudes desse professor ao trabalhar com o ensino de matemática na Educação Básica ou Superior.

O ensino sobre a *incompletude* nas licenciaturas traz consigo a possibilidade de reunir articuladamente noções e ideias matemáticas que potencializam discussões e reflexões, viabilizando a integração de projetos dos cursos de licenciatura, uma vez que todos visam formar professores para o ensino de matemática.

Discordamos do modo de pensar de muitos membros da comunidade de educadores matemáticos ao afirmarem ser o teorema da incompletude de Gödel inadequado para fazer parte dos temas trabalhados nas licenciaturas. Em nossas atividades de ensino e de aprendizagem e em nossa experiência com TIG, os licenciandos revelam interesse e permanecem atentos aos temas matemáticos e filosóficos trabalhadas no decorrer das aulas.

Podemos notar que os estudantes, que antes desconheciam a existência do teorema da incompletude de Gödel e do(s) indecidível(is) na aritmética de Peano, que implica numa limitação do método axiomático, valorizam esse conhecimento e refletem sobre ele, compreendendo a vivacidade da matemática como um todo. Pelas suas exposições, compreendemos que se afastam das ideias ingênuas que tomam essa ciência como soberana e completa.

4 REFERÊNCIAS

BATISTELA, R. F. *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática*. 2017, 140 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V.; LAZARI, H. Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*. v. 10, n. 3, p. 198-207, 2017.

BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V. O sentido do teorema da incompletude de Gödel para licenciandos em matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2018, Foz do Iguaçu. *Anais*...Foz do Iguaçu: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. p. 1-12.

BATISTELA, R. F. um curso presencial sobre o teorema da incompletude de Gödel para estudantes de licenciatura em matemática. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 15, 2019, Medellín. *Anais*... Medellín: Inter-American Conference on Matematics Education, 2019. p. 1-12.

D'AMBRÓSIO, U. Um brasileiro no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 3, n. 5, p. 131-139, 2003.

GOLDSTEIN, R. *Incompletude:* a prova e o paradoxo de Kurt Gödel. Tradução de I. Koytowski. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

GUERRERIO, G. Gödel, um tímido iconoclasta. *Scientific American Brasil*. A vanguarda da matemática: e os limites da razão. São Paulo: Duetto Editorial Ltda. Edição revista e atualizada. Coleção gênios da ciência, n. 8, p. 39-67, 2012.

NAGEL, E.; NEWMAN, J. R. *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

Recebido em: 29/05/2019
Aprovado em: 22/10/2019

---

[i] Parte dessa pesquisa foi apresentada no VII SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática em 2018.

[ii] A Introdução de Batistela (2017); A parte relacionada a Gödel da revista Scientific American - Gênios da Ciência, Guerrerio (2012); o artigo "Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática" de Batistela, Bicudo e Lazari (2017).

[iii] As sugestões foram Goldstein (2008); Guerrerio (2012); Nagel e Newman (1973).

[iv] A mais recente das resoluções do Conselho Nacional de Educação é Resolução CNE/MEC nº 2 de 1º julho de 2015.